様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年６月１２日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006～2008
課題番号：１８５４００６３
研究課題名（和文）　複素および共形幾何における種々の構造とそれらの不定値類似に関する研究
研究課題名（英文）
Research for various structures in complex geometry and conformal geometry and their indefinite analogue

研究代表者
鎌田　博行（KAMADA HIROYUKI）
宮城教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：００２４９７９９

研究成果の概要：ある種の超エルミート多様体を底とするトーラス束における超ＣＲ構造の構成法を導き、様々な擬凸性や他の類似の構造との違いを与える例を構成した。また、超ＣＲ多様体におけるＣＲ構造の族とそのツイスター空間上のＣＲ構造の積分可能性の関連を調べた。定スカラー曲率ケーラー構造に関連して、ハミルトンＳ^1-作用をもつコンパクト不定値ケーラー曲面は、ある線織面に双正則であり、さらに、全スカラー曲率が零ならばあるヒルツェブルフ曲面に双正則であることを示した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,400,000	0	1,400,000
2007 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	3,100,000	510,000	3,610,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：定スカラー曲率、ケーラー計量、板東・カラビ・二木の障害；ルブラン・メイソン対応、ヌル・キリングベクトル場；超ＣＲ構造、レヴィ形式、強擬凸性、超擬凸性、ツイスター空間

１．研究開始当初の背景

正定値計量をもつ多様体（リーマン多様体、エルミート多様体、ケーラー多様体など）上の幾何構造の多くについて、それらの不定値版というべき対応物が定義され、存在、構成法、一意性、モジュライなどが自然な問題として現れる。種々の幾何構造の不定値版には、定義の類似性に起因する正定値の場合とよく似た性質が成立する場合がある一方、幾何学的な性質が大きく異なることもある。計量のアインシュタイン性や自己双対性、（超）エルミート性や（超）ケーラー性は、不定値の場合にも同様に定義される。また、正定値の場合のいろいろな計量を構成するためのアンザッツは、適当な改変により、しばしば不定値の場合にも適用される。例えば、自己双対計量の構成法としてよく知られているルブランのハイパボリック・アンザッツは、双曲空間の代わりにドゥ・ジッター空間を用いることで、非常に類似した形式の不定値バ

ージョンが、トッドと研究代表者により発見されていた。

一方、コンパクト実４次元超ケーラー多様体は、複素トーラスまたは K３曲面に双正則であり、計量の平坦性については、そのオイラー標数で完全に判別されるが、その不定値版（ニュートラル超ケーラー多様体、超シンプレクティック多様体）については、計量の平坦性を位相的に判定することはできない。実際、非平坦なニュートラル超ケーラー構造をもつ複素トーラスや第一種小平曲面が存在する。この現象は、不定値計量に付随するノルムに関して、零ベクトル（場）以外のヌルベクトル（場）が存在することに起因する。これに似た計量の正定値と不定値の違いを示す現象が他にも幾つか観察されている。

複素幾何のレベルでは、正定値のコンパクトケーラー多様体に対して、セールの双対性が成り立ち、特に奇数次のベッチ数が偶数であることが従う。ところが、不定値の場合は、１次のベッチ数が奇数となるコンパクト不定値ケーラー多様体（例えば、第一種小平曲面）が存在し、奇数次ベッチ数の偶数性は一般に成り立たない。また、正定値のケーラー幾何で基本的な dd^c-補題も不定値の場合、一般には成り立たない。

線形代数のレベルでは、正定値の場合の対角化の理論が、不定値計量対しては必ずしも成り立たないことから、種々の曲率テンソルにおいて、対角行列以外のジョルダン標準形が現れ、正定値とは異なる分類基準が必要となる。こうした意味でも、正定値計量に比べて不定値計量に関わる幾何構造は、研究の対象として複雑になるが、逆に対象を豊富にするとも考えられる。

その他には、正定値計量に関わる幾何構造から導かれる微分方程式が楕円型であることが多い一方で、不定値の場合は、対応する方程式が（超）双曲型となることから、解析的な違いも現れる。

２．研究の目的

研究開始当初の背景をふまえて、本研究では、計量に関わる幾何学的な構造（例えば、計量の自己双対性、アインシュタイン性、スカラー平坦性、定スカラー曲率性など）について、計量の正値性・不定値性に依存する性質と依存しない性質を観察し、計量の符号数（正値性・不定値性）によらない方法がどこまで適用できるか、その適用範囲の限界を追求し、その中で計量の正値性・不定値性（正定値性・非退化性）の差異を明らかにすることを一つの目的とした。研究開始段階での具体的な課題として次があげられていた：

(1) 板東・カラビ・二木の障害の一般化とその具体的計算。
(2) 不定値ケーラー類とその判定法の一般化。
(3) デルザン構成法の不定値版。
(4) 端的ケーラー計量の不定値類似。
(5) 共形幾何的一般化。
(6) （不定値）超ケーラー構造・超 CR 構造の幾何。

３．研究の方法

本研究課題は、微分幾何学および複素幾何学の双方に属するテーマであり、シンプレクティック幾何学、代数幾何学、位相幾何学、および数理物理学や解析学とも関わっている。したがって、様々な分野の資料・文献等が必要となった。この点をふまえると、研究の方法は概ね以下のように述べられる：

（１）研究に関連する情報や文献の入手。
（２）（１）のための国内・海外の研究者と面会、討論、意見交換。
（３）既知の結果を理解と、そこで用いられる手法などを整理。
（４）（１）～（３）で収集・整理された情報等の本研究課題への応用の可能性の検討。
（５）収集した学術的結果やそれらの情報のうち重要なものの記録・保存。
（６）研究成果の発表（口頭発表・論文）。

（上記（１）～（６）は必要に応じて繰り返される。）

４．研究成果

（１）板東・カラビ・二木の障害の一般化とその具体的計算。

板東・カラビ・二木の障害は、定スカラー曲率正定値ケーラー計量の存在に対する障害としてよく知られているものの一つであり、ケーラー形式およびリッチ形式から決まるポテンシャル関数と正則ベクトル場を用いて定まる積分量として与えられる。本研究課題の申請以前、二木・満渕によるこの障害の書き換えを通じて、ケーラー類の有理性と正則ベクトル場の正則ハミルトン性などの条件のもと、不定値ケーラー計量に対しても well-defined になる場合があることが知られていた。研究代表者は、この障害を用いて、ヒルツェブルフ曲面と呼ばれるコンパクト複素曲面上にスカラー平坦（不定値）ケーラー計量が存在するためには、そのランクが０、即ち、複素射影直線の直積に双正則であることが必要十分であることを示した。さらに、本研究課題を申請後、一般のケーラー類に対する、（不定値版の）板東・カラビ・二木の障害の well-defined 性を考察し、ある十分条件を得ていた。その条件はコンパクトトーリック多様体では自動的に満たされるもので

あり、特にヒルツェブルフ曲面に対しても適用できる。このことから、定スカラー曲率（正定値、不定値）ケーラー計量が存在についても先と同様の結果が成り立つことを示した（プレプリント）。この結果は、正定値の場合、通常、松島・リヒネロビィッツの障害を用いて示されるが、不定値の場合に対する松島・リヒネロヴィッツの障害が存在するかどうかは不明であり、今後の課題として現在も残されている。本研究では、上記プレプリントに対して、改めて点検・再検討を行い、正定値の場合と不定値の場合の対応がよくわかるように、加筆・修正を行い、学術雑誌に論文として投稿した。同論文では、ハミルトン S^1-作用をもつコンパクト不定値ケーラー曲面が符号数零の線織面と双正則であり、さらに全スカラー曲率が０のときには、ヒルツェブルフ曲面と双正則であることを示した。この結果は、ハミルトンS^1-対称性（S^1-作用が計量を保つ）のもとで知られていたが、同じ結論がより弱いハミルトン S^1-作用（S^1-作用が計量を保つとは限らない）でも成り立つことを、別の方法で示したものである。また、板東・カラビ・二木の障害がwell-defined となる高次元の対象として、ある（正定値）自己双対多様体のツイスター空間が考えられるが、具体的な計算は今後の課題である。

（２）定値ケーラー類とその判定法
（３）デルザン構成法の不定値版
（４）端的ケーラー計量の不定値類似
については、特に公表すべき結果は得られなかった。

（２）については、正定値の場合は中井の判定法と呼ばれる判定法があるが、（１）に述べたヒルツェブルフ曲面上の定スカラー曲率（正定値）ケーラー計量の存在に対する必要十分条件を板東・カラビ・二木の障害を用いて導く際、中井の判定法が有効に用いられた。不定値の場合には、判定法の定式化を、具体例などを通じて予想する必要性を感じているが、現在のところ判定法のあるべき姿はまだわかっていない。

（４）に関連して、正定値の端的ケーラー計量については、研究課題申請以後、多くの重要な結果が得られているが、不定値版については、複素曲面に限っても、そのほとんどが今後の課題として多く残されている。

（５）共形幾何的一般化については、ルブラン・メイソンによる新しいツイスター対応（ルブラン・メイソン対応と呼ぶ）と関連して、最近、中田文憲氏が幾つかの結果を得ている。特に２次元球面の直積上のある種の特異性をもつ自己双対（不定値）計量に対するルブラン・メイソン対応を具体的に書き下した仕事が、トッドと研究代表者が構成した自己双対計量についても同様の形式でルブラン・メイソン対応を具体的に書き下すことができるかどうかは興味深い問題である。この問題に対して、自明でない最も簡単な場合について、計量、ケーラー形式、リッチ形式などを具体的に書き下し、ヌル・キリングベクトル場についての考察を行った。しかしながら、ルブラン・メイソン型のツイスター対応で必要となる計量のツォルフライ性（ヌル測地線が全て閉じるという性質）は示すことができなかった。ルブラン・メイソンの結果によれば、２次元単位球面の直積上に定まる標準直積不定値計量のまわりに自己双対計量
無限次元ファミリーが存在するが、標準計量から「遠い」ところでの自己双対計量の存在問題は、今後の大きな問題である。

（６）（不定値）超ケーラー構造・超ＣＲ構造の幾何。

ＣＲ構造は、複素多様体内の実超曲面をモデルとしており、多様体上に余階数１の複素分布（接束の複素部分束）が定まる。この複素部分束の定義１-形式からレヴィ形式と呼ばれる２次形式が定まり、それが正定値であるとき、ＣＲ構造は強擬凸であると言われる。強擬凸ＣＲ構造に対して、レヴィ形式を定める１-形式が与えられると、田中・ウェブスター接続と呼ばれる標準的な接続が定まる。ＣＲ幾何においては、レヴィ形式がリーマン幾何におけるリーマン計量、田中・ウェブスター接続がレヴィ-チビタ接続の代替物と考えられる。

同様にして、超ＣＲ構造は、超複素多様体内の実超曲面を典型モデルとする幾何構造である。超ＣＲ構造をもつ多様体の例として、四元数空間内の単位球面や四元数ハイゼンベルグ群が最も基本的である。これらの空間をモデルとする幾何構造は、これまでもいろいろと提案されており、（擬）３-佐々木構造をはじめ、近年では、ビカールの四元数接触構造、アレクセエフスキー・神島の擬共形的四元数ＣＲ構造が知られている。これらの構造と本研究課題における超ＣＲ構造の差異を理解することは基本的な問題である。

四元数ベクトル空間の実超曲面に自然に定まる超ＣＲ構造に対しては、定義関数の凸性のもとで、余階数３の四元数分布上にその上の構造と適合する正定値計量が定まる。一般の超ＣＲ構造に対しても、構造の積分可能性より、四元数分布を定義する純虚四元数値１-形式からその分布上の構造と適合する２次形式（レヴィ形式）が定まる。レヴィ形式が正定値のとき、考察している超ＣＲ構造は強擬凸であると言われる。研究代表者は連携研究者の納谷氏とともに、より強い凸性（ultra pseudoconvexity: 超擬凸性）のもと、田中・ウェブスター接続に対応する接続が存

在することを示していた。そこで、超ＣＲ構造に対する強擬凸性と超擬凸性の差異が問題となる（四元数ベクトル空間の凸超曲面や四元数ハイゼンベルグ群に定まる超ＣＲ構造は超擬凸である）。

　ところで、ケーラー多様体を底とした佐々木構造の束（バンドル）構成が知られているが、本研究では、これに類似した超ＣＲ構造の構成法を得た。具体的には、超エルミート多様体上の３次元トーラス（または純虚四元数）主束に対して、接続形式がある適合条件をみたすときに、主束の全空間に（強擬凸）超ＣＲ構造を構成できることを示した（納谷氏との共同研究）。例えば、四元数ハイゼンベルグ群は四元数ベクトル空間上の純虚四元数束とみなすことができ、標準的な超ＣＲ構造はこの構成法によっても復元できる。特に、捩付超ケーラー多様体（以下、ＨＫＴ多様体という）については、ＨＫＴポテンシャルの存在定理により、（局所的には）ＨＫＴ多様体を底とする純虚四元数束上に強擬凸超ＣＲ構造が構成できる。この束構成法は、超ケーラー多様体を底とする３次元トーラス（または純虚四元数）束におけるヘルナンデスによる擬３-佐々木構造の束構成法の一般化と考えられる。応用として、適当な底空間と接続形式を選ぶことにより、強擬凸であって、超擬凸でない超ＣＲ構造や、その他興味深い例が構成できる。特に、ビカールの四元数構造やアレフセエフスキイ・神島の擬共形四元数ＣＲ構造に含まれない超ＣＲ構造が存在することが具体例によって分かる。

　また、超複素多様体のツイスター空間の構成と同様にして、超ＣＲ多様体上にツイスター空間と呼ばれる２次元球面束が構成され、自然な概ＣＲ構造が定まる。一方、超ＣＲ多様体上には、２次元球面で径数づけされるＣＲ構造の族が付随する。本研究では、このＣＲ構造の族の積分可能性から、ツイスター空間上の概ＣＲ構造の積分可能性がしたがうことを示した。

　超ＣＲ構造と不定値計量の関係について、超ＣＲ多様体のツイスター空間（ツイスターＣＲ空間）上のレヴィ形式は決して正定値にならず、（一般には退化し得る）不定値２次形式が付随することに注意する。また、超ＣＲ構造が多様体に与えられると、それを定める純虚四元数値１-形式とレヴィ形式を用いて多様体上のリーマン計量が構成できる。このリーマン計量は、複素部分束の定義１-形式を（−１）倍（一般に、負の関数倍）することにより、(4n,3) 型の不定値計量が得られる（ただし多様体の実次元は 4n+3 とする）。このような変形は、「０-型」変形と呼ばれ、正定値計量を不定値計量に変形する所謂ウィック回転の典型例ともいえる。このように超ＣＲ構造は自然に不定値計量と関わっている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

無

６．研究組織
（１）研究代表者
鎌田　博行（KAMADA HIROYUKI）
宮城教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：00249799

（２）研究分担者
無

（３）連携研究者
相原　義弘（AIHARA YOSHIHIRO）
沼津工業高等専門学校・教養科・教授
（現：福島大学・人間発達文化学類・教授）
研究者番号：60175718

納谷　信（NAYATANI SHIN）
名古屋大学・大学院多元数理研究科・教授
研究者番号：70222180

中川　泰宏（NAKAGAWA YASUHIRO）
金沢大学・理工研究域 数物科学系・准教授
研究者番号：90250662

井関　裕靖（IZEKI HIROYASU）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90244409