

研究種目：基盤研究 (C)
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18540067
 研究課題名 (和文) 4次元微分ポアンカレ予想の微分幾何的解明と改変ヤマベ不変量
 研究課題名 (英文) Differential geometric study of four dimensional diffeomorphism
 Poincare conjecture and variant Yamabe invariants
 研究代表者
 伊藤 光弘 (ITO MITSUHIRO)
 筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
 研究者番号：40015912

研究成果の概要：幾何学的不変量としての3次元双対 Thurston ノルムを実現する3次元 Riemann 多様体の特徴づけを与えることができた。Hadamard 多様体 X に対して X の理想境界上の確率測度の空間 P の情報幾何学を X の Laplace-Beltrami 作用素の Poisson 核に適用して、対称性や調和性などの X のリーマン幾何を展開することができた。また同時にコンパクト (および非コンパクト) 強擬凸 CR 多様体上の正則ベクトル束のコホモロジー群双対定理を確立することができた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,400,000	0	1,400,000
2007年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	630,000	4,130,000

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ポアンカレ予想, Ricci フロー, 3次元 Seiberg-Witten 理論, Fisher 情報計量, Poisson 核, 熱核, Damek-Ricci 空間

1. 研究開始当初の背景

当初、LeBrun, Gursky らによる改変ヤマベ不変量に関する研究蓄積が進んだ。またポアンカレ予想のペレルマンによる解決に本質的に寄与した Ricci フローを4次元微分ポアンカレ予想解決に適用する機が熟してきつつあった。因みに本来の4次元ポアンカレ予想は Friedmann によって解決済み。微分構造まで込めて4次元球面に同相かということが大いに関心ある。ヤマベ不変量の改変版をここに Micallef and Moore の仕事、Hamilton の Ricci フローの結果を受け継ぐかたちで4

次元微分ポアンカレ予想解決の攻略図式が描けるようになった。

2. 研究の目的

次の予想を解決すること 4次元微分ポアンカレ予想 「4次元ホモトピー球面はイソトロピー曲率に関する改変ヤマベ不変量を正にするであろう」 および周辺の幾何学の問題の解明を目的とする。

3. 研究の方法

Ricci フローを曲率作用素の最大固有値に適用させるといふ、当初の研究開始時点での微妙な困難性を回避するところまでいかなかったため、より発展性ある3つの周辺の幾何学問題に大域解析的アプローチで取り組む：

- (1) 双対 Thurston ノルムなる3次元幾何学的不変量についてゲージ理論の枠組みで解明する
- (2) 情報幾何学的に自然に定義される確率測度の空間上のリーマン計量の幾何学を駆使することにより Hadamard 多様体の理想境界の研究を展開する
- (3) 強擬凸 CR 多様体を Dolbeault 作用素に基づく Kaehler 幾何学の手法で考察する

4. 研究成果

- (1) 3次元 Seiberg-Witten 理論と3次元幾何構造の研究:
幾何学的不変量としての3次元双対 Thurston ノルムを実現する3次元 Riemann 多様体の特徴づけをえることができた。所与3次元閉多様体は Thurston 第8モデル幾何構造を許容すること、およびこの場合の3次元 Seiberg-Witten 不変量は±1であることがわれわれの研究から明らかになった。Thurston ノルム実現の幾何学として世界的に初めての成果である。
- (2) Poisson 核,熱核の Fisher 情報幾何学的研究:
単連結非正曲率完備 Riemann 多様体 (Hadamard 多様体) X 上定義される Laplace-Beltrami 作用素の Poisson 核は X の理想境界上の確率測度の空間 P をなし、 X から P への写像が自然に定まる。において次の定理がえられた。 X が階数1非コンパクト型対称空間ならば、 P 上の Fisher 情報計量の写像による引き戻しは X 上のオリジナル計量に比例する。さらに定理を X について Damek-Ricci 空間にまで拡張できた。また Poisson 核を熱核に置き換えて同様の定理をえることに分担者との共同研究により成功した。インパクトある成果であり、情報幾何学の進展にとって一つの方向性を大きく与えた。
- (3) 強擬凸 CR 多様体の Serre 双対性の研究:
コンパクト強擬凸 CR 多様体上の正則 vector 束の cohomology に関する双対定理を証明することができた。この

双対性定理を非コンパクト強擬凸 CR 多様体にまで拡張することに成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計12件)

- ① M.Itoh, T.Yamase, Seiberg-Witten theory and the geometric structure $R \times H^2$, Hokkaido M.J.,38, 2009, 67-81. 査読有
- ② T.Yamase, Seiberg - Witten - Floer homology and the geometric structure $R \times H^2$, KodaiMath. J., 32, 2009,117-129. 査読有
- ③ M.Itoh, H.Satoh, Fisher Information Geometry of Poisson Kernels and Heat Kernel on Riemannian Manifolds, Proc. 12th International Workshop on Differential Geometry (Taegu Korea) 12, 2008, 1-20. 査読有
- ④ M.Itoh, H.Satoh, A note on the Fisher information metric and heat kernels, International Journal Pure Applied Math., 46, 2008,347-353. 査読有
- ⑤ M.Itoh, Y. Shishido, Fisher Information Metric and Poisson kernels, Differential Geometry and its Application, 26, 2008, 347-356. 査読有
つくばリポジトリ <https://www.tulips.tsukuiba.ac.jp/dspace>
- ⑥ M.Itoh, J.Masamune, T. Saotome, The Serre duality for a non-compact weighted CR manifold, Proc. American Math. Society, 136, 2008, 3539-3548. 査読有
つくばリポジトリ <https://www.tulips.tsukuiba.ac.jp/dspace>
- ⑦ M.Itoh, 3-dim Seiberg-Witten Theory and the Thurston's Geometric Structures, Proc. 11thInt.Workshop Differential Geometry (Taegu,Korea), 11,2007,9-16. 査読有
- ⑧ M.Itoh, T.Yamase, Seiberg-Witten Theory for the 3-manifold carrying the geometric structure $R \times H^2$, Rev. Cal.Math.Soc., 15(1),2007,19-28. 査読有
- ⑨ 伊藤光弘、宍戸雄一, Fisher information metric and Poisson kernels over negatively curved Riemannian manifolds, 数理解析研,1560, 2007,121-136. 査読無

- ⑩ M.Itoh, T.Saotome, The Serre Duality Theorem for Holomorphic Vector Bundles over a Strongly Pseudo-Convex Manifold, Tsukuba J. M., 31, 2007, 197-204. 査読有
- ⑪ M.Itoh, The Serre Duality for Holomorphic Vector Bundles over Strongly Pseudo-Convex Manifolds, Proc. 11th International Workshop on Differential Geometry (Taegu, Korea), 11, 2007, 17-24. 査読有
- ⑫ M.Itoh, T.Yamase, The dual Thurston norm and geometry of closed 3-manifolds, Osaka J.M., 43, 2006, 121-129. 査読有

[学会発表] (計16件)

- ① 伊藤光弘, 佐藤弘康, Fisher 情報計量, Poisson 核と調和写像, 日本数学会 2009 年会、2009 年 3 月 28 日、東京大学
- ② 佐藤弘康, Poisson 核、熱核の情報幾何、研究集会 リーマン幾何と幾何解析、2009 年 2 月 20 日、筑波大学
- ③ 佐藤弘康, Poisson 核、熱核の情報幾何学 大阪市立大学数学研究所 情報幾何学研究集会 2009、2009 年 1 月 25 日
- ④ 佐藤弘康, Poisson 核、熱核の情報幾何学、北大幾何学コロキウム、2008 年 12 月 12 日、北海道大学
- ⑤ 伊藤光弘, 佐藤弘康, Damek-Ricci 空間の Poisson 核と Fisher 情報計量、日本数学会 2008 年度秋季総合分科会、2008 年 9 月 25 日、東工大
- ⑥ 伊藤光弘, 佐藤弘康, 熱核の情報幾何学と Shannon のエントロピー、日本数学会 2008 年度秋季総合分科会、2008 年 9 月 25 日、東工大
- ⑦ 佐藤弘康, 熱核、Poisson 核の情報幾何学と Damek-Ricci 空間、55 回幾何学シンポ、2008 年 8 月 14 日、弘前大学
- ⑧ 佐藤弘康, Poisson 核、熱核と Fisher 情報量、大阪市立大数学研究所 ミニスクール「情報幾何への入門と応用 II」、2007 年 12 月 23 日、大阪市立大
- ⑨ 伊藤光弘, Fisher 情報計量と Poisson 核、熱核の情報幾何学、名古屋大学幾何セミナー、2007 年 11 月 26 日
- ⑩ 伊藤光弘, 山瀬尊久, ラムダ汎関数と 3 次元サイバーグ・ウィッテン理論、日本数学会秋季総合分科会幾何学分科会、2007 年 9 月 23 日
- ⑪ 伊藤光弘, 佐藤弘康, 宍戸雄一, 階数 1 非コンパクト型対称空間の熱核と Fisher 情報計量、日本数学会秋季総合分科会幾何学分科会、2007 年 9 月 21 日
- ⑫ 伊藤光弘, 正宗淳, 早乙女飛成, 強擬凸多様体上の Serre 双対定理の非コンパクト型

への拡張について、日本数学会秋季総合分科会幾何学分科会、2007 年 9 月 21 日

- ⑬ M.Itoh, The Fisher Information Metric and Poisson Kernel Maps, 4th International Conference of Applied Mathematics and Computing, Plovdiv, Bulgaria, 2007, 12-18 Aug.
- ⑭ 伊藤光弘, 宍戸雄一, Fisher information metric and Poisson kernels over negatively curved Riemannian manifolds, Statistical Decision for Multiple Comparison and its Related Topics, 京都数理解析研究所、2007 年 3 月 13 日
- ⑮ M.Itoh, The Serre duality for holomorphic vector bundles over strongly pseudo convex CR-manifolds, 11th International Workshop on Differential Geometry, Taegu, Korea, 10 November, 2006.
- ⑯ M.Itoh, Seiberg-Witten theory and the Thurston's geometric structures, 11th International Workshop on Differential Geometry, Taegu, Korea, 9 November, 2006

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 光弘 (ITO MITSUHIRO)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号：40015912

(2) 研究分担者

山口 孝男 (YAMAGUCHI TAKAO)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号：00182444

田崎 博之 (TASAKI HIROYUKI)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：30179684

川村 一宏 (KAWAMURA KAZUHIRO)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授
研究者番号：40204771

佐藤 弘康 (SATO HIROYASU)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准研究員
研究者番号：00375396

山瀬 尊久 (YAMASE TAKAHISA)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・
研究科特別研究員
研究者番号：20451677

(3) 連携研究者
なし