

研究種目：基盤研究（C）  
 研究期間：2006～2009  
 課題番号：18540076  
 研究課題名（和文） 最短ネットワーク問題と平面凸ビリヤード問題の測地線の幾何学的方法による研究  
 研究課題名（英文） Geometry of geodesics for minimal network problems and plane convex billiards  
 研究代表者  
 印南 信宏（INNAMI NOBUHIRO）  
 新潟大学・自然科学系・教授  
 研究者番号：20160145

研究成果の概要（和文）：最短ネットワーク問題に関しては、ユークリッド平面のシュタイナー比予想が1990年に解決したようになっていたが、その証明にギャップがあることを指摘した。これにより、1998年に証明されたようになっていた球面のシュタイナー比も未解決問題に逆戻りした。一方で、負の定曲率曲面のシュタイナー比が  $1/2$  であることを証明した。もっと一般にビジビリティ公理を満たす曲面のシュタイナー比の計算の方法を確立した。また、非負曲率曲面のシュタイナー比を計算する際に有用になる圧縮定理を証明した。平面の凸ビリヤード問題に関しては、配位空間の平行線による層化と状相空間の可縮でないビリヤードボール写像で不変な閉曲線との関係について研究し、円ビリヤードの特徴づけを行った。

研究成果の概要（英文）：Concerning the minimal network problems, we pointed out that there was a gap in the proof of the Steiner ratio of Euclidean planes published in 1990. Thus the Steiner ratio conjecture of Gilbert and Pollak may still be open and the Steiner ratio of spheres which was discovered in 1998 has not been solved yet. On the other hands, we succeeded in obtaining the Steiner ratio of hyperbolic surfaces. Moreover, we showed a method to estimate the Steiner ratio of surfaces satisfying the Visibility axiom. We proved the compression theorem which will be useful to find the Steiner ratio of surfaces with nonnegative sectional curvature. Concerning the plane convex billiard problems, we studied the relation between a foliation by parallels in the configuration space and a non-contractible closed curve invariant under the billiard ball map in the phase space. As an application we showed a characterization for circular billiards.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,100,000	660,000	3,760,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何学，測地線の幾何学，最短ネットワーク問題，シュタイナー比，平面凸ビリヤード問題，平行線の理論

## 1. 研究開始当初の背景

測地線の幾何学としての平行線の理論は、私が20年以上研究している課題である。そして、その理論が適用、応用できる分野の研究との関連において平行線の理論を派生させ、また、発展させてきた。本研究は、その一つである平面凸ビリヤード問題の積分可能性に関するバーコフ予想の解決や最短ネットワーク問題に測地線の幾何学的方法を導入することに向けたものである。今までの研究過程から、ビリヤード球の軌道の折れ線表現で現れる平行線族とビリヤード台上の図形として現れるコウスチックと呼ばれる直線族の包絡線との関係を詳細に研究することが重要であることが分かってきた。

最短ネットワーク問題に関しては、基礎的な学習を終え、ハイパボリック曲面のシュタイナー比の計算に平行線の理論が有効なこと、また、非負曲率曲面のシュタイナー比の計算にはトポノゴフの比較定理が応用できそうなことが明らかになった。貼り合わせ曲面に対するトポノゴフの定理の拡張の準備も整っているので、最短ネットワーク問題を貼り合わせ曲面上で研究できる。

## 2. 研究の目的

ユークリッド幾何学において、最も重要な役割をしているのは直線である。球面やトーラスのような曲面や距離が定まっている空間において、直線の役目をする曲線は、測地線と呼ばれている。一般的な空間において、測地線の集合が持っている性質と空間の構造や形との関係を調べるのが測地線の幾何学である。例えば、ユークリッド平面において、無限に延びている2本の交わらない直線は、平行であるという。交わらない測地線を平行線のように考え、平行線が存在やその性質から幾何構造を調べるのが平行線の理論である。微分方程式の解曲線族やある現象を表現するために作られた空間等の研究で、交わらない曲線族がしばしば現れる。これらの曲線族を平行線のように考え、測地線の幾何学的手法を応用し、新しい結果を得ることも可能である。本研究の目的は、最短ネットワーク問題と平面凸ビリヤード問題に関するバーコフ予想の解決に測地線の幾何学的方法を導入することに向けた研究を展開することである。

コンピュータの発達に伴い数学から数理

科学へと変貌し、扱う問題も急激に広がった。最短ネットワーク問題やポロノイ領域の研究などがそれである。平面上に $n$ 個の点が与えられたとき、それらの全ての点を総長が最も短くなるような線で結び合わせる問題を最短ネットワーク問題という。高速道路網の建設計画や電気配線などで利用される。また、勢力図の抽象化としてポロノイ図、ポロノイ領域は、郵便局の配置計画や小学校の配置計画などに利用される。これらのことは、離散数学、計算幾何学で研究され発達してきた。そのため、平面上でこれらの問題を扱うのが殆どであった。物体の表面は滑らかな曲面を貼り合わせたものになっていることが多いのだから、これらの問題を貼り合わされた曲面上で研究することは理論的な数学ばかりでなく応用上も重要である。測地線の幾何学的方法（トポノゴフの比較定理や平行線の理論など）は、その有効な研究手段になる。実際、曲面に対するシュタイナー比の研究は測地線の幾何学の活躍の場になる。測地線の幾何学として行われてきた方法により、最短ネットワーク問題を貼り合わされた曲面上で効果的に研究でき、測地線の幾何学の応用範囲を拡大する。

平面凸ビリヤード問題を扱うために、ビリヤード球の軌道を平面上のある性質を満たす折れ線として表す方法がある。この方法において、平面凸ビリヤードの積分可能性とビリヤード球の軌道族による平面の層化が密接に関係している。このことに注目して、平行線の幾何学的方法を平面凸ビリヤード問題に適用して、積分可能性の問題等を研究する。

## 3. 研究の方法

本研究の参考となる分野の専門家から知識の提供を受けたり、専門家との本研究についての議論や検討を行うという数学研究のオーソドックスな方法で研究を遂行した。また、関連した分野の研究集会に参加したり、文献、図書、レクチャーノートを調べることも行った。

## 4. 研究成果

(1) 完備単連結な負の定曲率曲面のシュタイナー比が $1/2$ であることを証明した。

(2) 曲率が  $k$  以上のアレキサンドルフ曲面上の測地三角形領域から曲率  $k$  の完備単連結曲面上の比較三角形領域への距離を増加させない写像が存在することを証明した(圧縮定理)この定理の応用として, 円領域に関する圧縮定理や可変曲率曲面上の円ビリヤードの回転数の評価を得た。

(3) 負定曲率曲面のシュタイナー比の計算方法を詳細に調べて, より一般的な曲面に対してもシュタイナー比が計算できることを示した。エンドを持つ多様体のシュタイナー比の上からの評価を与えた。

(4) 平面凸ビリヤードを記述する配位空間での平行線による層構造と状相空間における可縮でない, ビリヤード写像で不変な閉曲線の存在との間の関係を調べ, ビアリーが行った円の特徴づけの別証明を与えた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

- ① Tamura Shinetsu, Innami Nobuhiro : Circular billiards and parallel axiom in convex billiards. *Tsukuba J. Math.* 33 (2009), no. 1, 147--160. 査読有
- ② Chun Sun Hyang, Park Jeong Hyeong, Sekigawa Kouei :  $\eta$ -Einstein tangent sphere bundles of constant radii. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 6 (2009), no. 6, 965--984. 査読有
- ③ Park J. H.; Sekigawa K. : When are the tangent sphere bundles of a Riemannian manifold  $\eta$ -Einstein? *Ann. Global Anal. Geom.* 36 (2009), no. 3, 275--284. 査読有
- ④ Euh Y., Park J. H., Sekigawa K. : Nearly Ka"hler manifolds with vanishing Tricerri-Vanhecke Bochner curvature tensor. *Differential Geom. Appl.* 27 (2009), no. 2, 250--256. 査読有
- ⑤ Tamura Shinetsu, Innami Nobuhiro : Steiner ratios for length spaces having ends. *Nihonkai Math. J.* 19 (2008), no. 2, 105--110. 査読有
- ⑥ Chai Y. D., Chun S. H., Park J. H., Sekigawa K. : Remarks on  $\eta$ -Einstein unit tangent bundles. *Monatsh. Math.* 155

(2008), no. 1, 31--42. 査読有

⑦ Hirobe Keiichiro, Oguro Takashi, Sekigawa Kouei : A remark on an example of a 6-dimensional Einstein almost-Ka"hler manifold. *J. Geom.* 88 (2008), no. 1-2, 70--74. 査読有

⑧ Sekigawa Kouei, Yamada Akira : Compact indefinite almost Ka"hler Einstein manifolds. *Geom. Dedicata* 132 (2008), 65--79. 査読有

⑨ Oguro Takashi, Sekigawa Kouei : Some critical almost Ka"hler structures. *Colloq. Math.* 111 (2008), no. 2, 205--212. 査読有

⑩ Innami Nobuhiro : Compression theorems for surfaces and their applications. *J. Math. Soc. Japan* 59 (2007), no. 3, 825--835. 査読有

⑪ Lee J., Park J. H., Sekigawa K. : Remarks on four-dimensional Tricerri-Vanhecke Bochner flat almost Hermitian manifolds. *Honam Math. J.* 29 (2007), no. 4, 681--694. 査読有

⑫ Hashimoto Hideya, Koda Takashi, Mashimo Katsuya, Sekigawa Kouei : Extrinsic homogeneous almost Hermitian 6-dimensional submanifolds in the octonions. *Kodai Math. J.* 30 (2007), no. 3, 297--321. 査読有

⑬ Innami Nobuhiro, Kim Byung Hak : Steiner ratio for hyperbolic surfaces. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 82 (2006), no. 6, 77--79. 査読有

[学会発表] (計 13 件)

- ① 印南信宏 : 最短ネットワークのシュタイナー比問題, 直観幾何学, 熊本大学, 2010年2月13日
- ② 印南信宏 : 平面凸ビリヤードの稠密軌道について, 測地線及び関連する諸問題, 熊本大学, 2010年1月9日
- ③ 印南信宏 : 曲面上の最小シュタイナー木問題とフェルマー・トリチェリ問題, 東海大学微分幾何セミナー, 東海大学, 2009年9月21日

④ 印南信宏 : Gilbert-Pollak のシュタイナー比予想について, リーマン幾何と幾何解析, 筑波大学, 2009年2月20日

⑤ 印南信宏 : シュタイナー比に関する Gilbert-Pollak 予想の証明には誤りがある, 測地線及び関連する諸問題, 熊本大学, 2009年1月11日

⑥ 印南信宏 : シュタイナー比に関する Gilbert-Pollak の予想について, 微分幾何学と複素構造, 新潟大学, 2008年11月5日

⑦ 印南信宏 : 非負曲率アレキサンドルフ曲面のシュタイナー比について, 等質空間の不変構造と部分多様体, 千葉工業大学津田沼校舎, 2008年3月13日

⑧ 印南信宏 : 距離を減少させる三角形間の写像とその応用, 第10回測地線及び関連する諸問題, 熊本大学, 2008年1月5日

⑨ 印南信宏 : Steiner ratio for surfaces, NIMS International Workshop on Riemannian Geometry and Related Area, National Institute for Mathematical Sciences, 2007年6月1日, 2日, 大韓民国

⑩ 印南信宏 : 曲面上の領域の圧縮定理, 多様体上の微分方程式, KKR ホテル金沢, 2006年12月7日

⑪ 印南信宏 : Compression theorems for surfaces, 微分幾何学セミナー, 筑波大学, 2006年11月14日

⑫ 印南信宏 : 最短ネットワーク問題におけるシュタイナー比について, 広島幾何学研究集会2006, 広島大学, 2006年10月4日

⑬ 印南信宏 : Compression theorems for surfaces with curvature bounded below I, II, Global Analysis of Real and Complex Manifolds, Cheju National University, 大韓民国, 2006年8月17日, 18日

[その他]

① 印南信宏 : 最短ネットワーク問題, 教員免許状更新講習, 新潟大学, 2009年8月18日

② 印南信宏 : 最短ネットワーク問題, さわやかサイエンス, 新潟県立自然科学館, 20

09年5月9日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

印南 信宏 (INNAMI NOBUHIRO)  
新潟大学・自然科学系・教授  
研究者番号: 20160145

(2) 研究分担者

関川 浩永 (SEKIGAWA KOUEI)  
新潟大学・自然科学系・フェロー  
研究者番号: 60018661