

平成 21 年 6 月 14 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2008

課題番号：18540078

研究課題名（和文） 2次元場の量子論の表現論的研究

研究課題名（英文） On the study of two dimensional quantum field theory by the method of representation theory

研究代表者

土屋 昭博（TSUCHIYA AKIHIRO）

東京大学・数物連携宇宙研究機構・特任教授

研究者番号：90022673

研究成果の概要： Zhu の有限性条件をみたく頂点作用素代数の表現のつくるアーベル圏が Artin かつ Noetherian であり、また既約対象が有限個であることを示した。さらに、対応する共形場理論を使ってこのアーベル圏が braided tensor 圏の構造を持つことを示した。典型的な例として、頂点作用素 $W(p)$ について、その表現のつくるアーベル圏が一の巾根における制限された $sl_2(\mathbb{C})$ 型の量子群の表現のつくるアーベル圏と同値であることを示した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,200,000	0	1,200,000
2007 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	690,000	4,190,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：

キーワード：共形場理論，頂点作用素代数，場の量子論，共形ブロック

1. 研究開始当初の背景

共形場理論は、1990年代始め頃にロシアの物理学者により統計物理学における2次元臨界現象を記述する理論として始められた。その後数学側からもヴィラソロ代数やアフィン・リー代数の表現論をリーマン面の Moduli 空間やリーマン面のプリンシパル束の moduli 空間上に展開することにより代数解析における D-加群の方法を使うことによ

りリーマン面上の共形場理論が展開された。

このことにより、ブレイド群や写像類群の表現が共形ブロックの monodromy 表現として現れ、低次元トポロジーにおけるノット、リンクや3次元多様体の量子不変量との関係も明らかになった。

一方、ブレイド群の表現は一の巾根におけるヘッケ環の表現を生み出し、量子群の表現論と関係が付き、数理物理学と現代数学を結

びつける重要な位置を確立した。

共形場理論における最も重要な概念である場の作用素の局所性や作用素展開は頂点作用素代数として代数化され、頂点作用素代数の表現論の研究と対応する共形場理論の研究が新たな研究分野として浮かび上がってきた。

頂点作用素代数により、リーマン面上の共形場理論が展開されるためには、頂点作用素代数が適当な有限性条件が課される必要がある。このような条件として1990年代始め、Zhu氏により提案されたC2有限性条件がある。私は2000年代始めより、このC2有限性条件を持つ頂点作用素代数の構造と表現論および対応する共形場理論の研究を始めた。

2. 研究の目的

(1) C2有限性をみたく頂点作用素代数の構造を解析し、その表現のつくるアーベル圏の構造を明らかにすること。

(2) C2有限性条件をみたく頂点作用素代数に付随した一般リーマン面上に共形場理論を建設すること、すなわちリーマン面のModuli空間上に共形ブロックの層を定義し、そのcoherency, K-Z型の確定特異点型D加群の構造およびModuli空間の境界に沿っての共形ブロックの因子化を定式化し証明すること。

(3) 射影空間上の共形ブロックの構造を使って、頂点作用素代数の表現のつくるアーベル圏上にfusion tensor積を定義し、このアーベル圏がrigid braid tensor圏の構造を持つことを示すこと、さらにfusion tensor積の構造を解析すること。

(4) C2有限性条件をみたく頂点作用素代数の色々な例を構成し、その表現のつくるアーベル圏の構造を解析すること。

3. 研究の方法

(1) C2有限性条件をみたく頂点作用素代数の構造と表現論。

頂点作用素代数は無限個の積をもつ複雑な代数系である。頂点作用素代数に対し、universal algebraと呼ぶtopologyをもつ無限次元代数をその構造と表現論を展開する。このとき、Artin環の構造論と表現論の考え方が重要となる。

(2) 共形場理論の展開、共形ブロックの定義、coherency, K-Z接続の定義はアフィン・リー環の場合と同様である。問題は因子化定理の定式化とその証明である。問題は、頂点作用素代数の表現のつくるアーベル圏がsemi-simpleにならないことである。このため、universal algebraの両側加群としての詳しい解析が重要となる。

(3) Tensor圏の構成、Fusion tensor積の構成、およびそのassociativity等、基本的な性質の解明には共形ブロックの因子化が最も重要である。より詳しく解明するためには、頂点作用素代数上の両側加群と片側加群の対応をつけることが重要である。

(4) 頂点作用素代数 $W(p)$ の表現論。1990年代中頃、ドイツの物理学者により自由場とスクリーニング作用素を使って頂点作用素代数 $W(p)$, $p=2, 3, \dots$ が定義された。この代数がC2有限性条件をみたくことを証明し、さらにその表現のつくるアーベル圏 q が1の $2p$ 条件の場の sl_2 型制限量子群の有限次元表現のつくるアーベル圏と圏同値であることを示す。方法は、スクリーニング作用素を詳しく調べることである。

4. 研究成果

(1) C2有限性条件をみたく頂点作用素代数の構造と表現のつくるアーベル圏の構造、頂点作用素代数は可算個の積を持つ複雑な代数系である。これを解析するため、universal algebraと呼ばれるトポロジーを持った無限次元代数を定義する。頂点作用素代数の表現とuniversal algebraの表現は1対1に対応する。Universal algebraはVirasoro代数の次数零の元 L_0 を含み、この L_0 により広義固有分解をもつ。この性質を使ってArtin環の表現の解析方法を拡張して次の結果を得た。

(2) 頂点作用素代数の表現のつくるアーベル圏はArtinかつNoetherianである。

(3) 単純対象の数は有限個である。

(4) 一般に L_0 は広義対角化はできるが、対角化は出来ない。また、アーベル圏はsemi-simpleとは限らない。

(5) universal algebraのdenseな部分空間でuniversal algebraの両側作用素で不変なものを構成した。

(6) C2有限性条件をみたく頂点作用素代数

に付随する一般リーマン面上の共形場理論の構成。

N 点付き種数 g 安定リーマン面の Moduli 空間上に共形ブロックの層を定義し、その coherency、 K - Z 接続の存在を示した。さらに、Moduli 空間の境界に沿っての共形ブロックの因子化を定式化し、証明した。表現のつくるアーベル圏が semi-simple でないため、因子化の定式化には工夫を要した。Universal algebra の両側加群の構成を使ってこの点を克服した。

(7) tensor 圏の構成

$P1$ 上の共形ブロックの性質をつかって表現のつくるアーベル圏に Fusion tensor 積を定義した。このため、 $P1$ 上の共形ブロックの性質を使い、左加群の圏から両側加群の圏への functor を定義し、この functor が両側加群の圏に自然に定義される tensor 積と左加群の圏における fusion tensor 積を保つことが重要となる。

このことにより、左加群のつくるアーベル圏は fusion tensor 積により braided tensor category となり、さらに tensor 積は exact functor であること、projective modules は injective modules となることを示した。この tensor 圏がさらに rigid であることの証明を詰めているところである。

(8) $W(p)$ 加群のつくるアーベル圏の構成

1990 年代中頃、ドイツの物理学者により定義された頂点作用素代数 $W(p)$, $p=2,3,\dots$ について次のことを示した。

$W(p)$ は C_2 -有限性条件をみたすこと、単純対象は $2p$ 個、 X_s^\pm , $s=1, p$ 個あること、さらに X_p^\pm は射影加群であることを示した。 $s=1, p-1$ につき X_s^\pm の射影 cover P_s^\pm を構成した。この構成のためにスクリーニング作用素の性質を詳しく調べた。また、これらの加群の射影性とアーベル圏のブロック分解を示すために加群 X_s^\pm 達の Ext^1 を決定した。このことにより、 $W(p)$ modules カテゴリーは $p+1$ 個のブロックに分解することを示した。そのうち 2 個は semi-simple であり、semi objects は 1 つであり、それぞれ X_p^+ , X_p^- よりなる。他の $p-1$ 個のブロックはそれぞれ 2 個の semi objects X_s^+ , X_s^- , $1 < s < p-1$ よりなる。

さらに $W(p)$ modules のつくるアーベル圏と q が 1 の $2p$ 乗根における sl_2 型の制限量子群の有限次元表現のつくるアーベル圏が圏同値であることを示した。これは B. Feigin 達による予想の解決にあたる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

A. Tsuchiya, K. Nagatomo, The Triplet Vertex Operator Algebra $W(p)$ the Restricted Quantum Group at Root of Unity, arXiv:0902.4607, 2009, 査読無
A. Tsuchiya, K. Nagatomo, A. Matsuo, Quasi-finite algebra graded by Hamiltonian and vertex operator, Moonshine -The First Century and Beyond, Cambridge Uni. Press, Vol.13, 2009, 査読有

[学会発表](計 1 件)

A. Tsuchiya, Triplet vertex algebra $W(p)$ and the quantum group, 2008 年度秋期総合分科会, 2008.9.25, 東京大学

[図書](計 件)

[産業財産権] 出願状況(計 件)

取得状況(計 件)

[その他]

6 . 研究組織

(1)研究代表者

土屋 昭博 (TSUCHIYA AKIHIRO)

東京大学・数物連携宇宙研究機構・特任教授

研究者番号：90022673

(2)研究分担者

(3)連携研究者