

平成22年6月1日現在

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006～2009

課題番号：18540079

研究課題名（和文） 非可換幾何学における概正則曲線の研究

研究課題名（英文） Non commutative geometry and moduli spaces of holomorphic curves

研究代表者 加藤 毅

(Kato Tsuyoshi)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：20273427

研究成果の概要（和文）：

ここで得られた研究成果には大きく分けて2つある。

まず一つ目は、非コンパクト4次元多様体であるキャッソンハンドル上で、モジュライ理論の構成を行なった。一般に非コンパクト空間上でのモジュライ理論の構成に関して2つのステップがあり、一つは線形化方程式のフレドホルム理論、もう一つは横断正則性理論である。4次元多様体上では前者の構成に関してはこれまでの研究でできていたが、昨年度までの研究により、後者の横断正則性定理を漸近的手法を用いることで導くことを行なった。

次に二つ目は、2つの異なる2変数斉次偏微分方程式に対して、それらの正値解の間の粗い漸近評価を見ることで、2変数斉次偏微分方程式全体の間の大域解析的な関係式を与えた。その関係式で割ったときのある種のモジュライ空間としての構造を調べることを行い、特にその関係式が非自明であることを示した。

研究成果の概要（英文）：

Mainly we have two results. One is on the construction of moduli spaces over Casson handles which are non compact smooth four manifolds. In general in order to construct moduli theory over non compact spaces, there are two steps which should be done, where one is Fredholm theory, and the other is transversality theory. For the former we have already done over the Casson handles. During this research periods, we have constructed transversality theory over the Casson handles by use of an approximation method. The other result is to construct a globally analytic relation on the set of polynomial type partial differential equations of two variables. It is given by use of a rough asymptotic comparison between positive solutions to different PDEs. In particular we have verified that the relation is non trivial by analyzing the structure of the moduli space with respect to the relation.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,400,000	660,000	4,060,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：キャパシティー，モジュライ理論

1. 研究開始当初の背景

シンプレクティック多様体のキャパシティー不変量はハミルトン力学系を用いて構成されることから、力学系との関係をしらべることは極めて重要なテーマである。その不変量は、シンプレクティック多様体の構造を調べるための基本的な道具となっている概正則曲線のモジュライ理論と密接な関係がある。それは非線形楕円型偏微分方程式の解のモジュライ空間の大域幾何学的な研究が根底にある。ここでは非コンパクト空間上での楕円型モジュライ理論を発展させ、さらにそれを用いて力学系と群作用へ応用していくことが目的である。

2. 研究の目的

ここでの研究の目的は、非線形偏微分方程式の解の構造を大域幾何学的に調べることにあり、特に次の2つの研究を行なった。

(1) まず一つ目は、非コンパクト空間上でのモジュライ理論の構成を行なうことである。特にキャッソンハンドル上でのモジュライ理論は、4次元多様体上の可微分構造と深い関わりがあり極めて重要なテーマとなっている。ここではモジュライ空間の横断正則性に関する解析を行った。

(2) 次に、2変数斉次偏微分方程式の正值解の間の粗い漸近評価を見ることで、それら全体の間で大域解析的な関係式を与えた。その関係式で割ったときの2変数斉次偏微分方程式のある種のモジュライ空間としての構造を調べることを行い、特にその関係式が非自明であることを示した。

3. 研究の方法

(1) まず非コンパクト空間上でのモジュライ理論のうち、特に横断正則性に関する解析に関して効果的に使うことのできる新しい手法を導入した。コンパクト空間とは異なり、非コンパクト空間上では関数空間が L^2 と重み付き L^2 とでは全く異なる性質を持つ。このことからコンパクト空間上で機能する横断正則性の一般的なメカニズムは非コンパクト空間上では成立しない。ここでは、関数空間を漸近的にコンパクト空間上のもので近似していく、というアイデアを用いる。それからある種の一様評価を

与えることで非コンパクト空間上のモジュライ空間の横断正則性を導いた。

(2) 次に、2変数斉次偏微分方程式全体の間で大域解析的な関係式を導入した。力学系間のスケール変換であるトロピカル幾何学を用いることで、正值解の無限遠点での拘束条件がある種のオートマトンで与えられる。このことを用いて、関係を持つ偏微分方程式の解たちの中にある種の一様評価が成立することを導いた。さらにその関係式が非自明であることを示すために、関係を持たないような偏微分方程式たちの組を構成することを行なった。

4. 研究成果

ここで得られた研究成果には大きく分けて2つある。

(1) まず一つ目は、モジュライ空間の大域幾何学に関するものである。それは楕円型非線形偏微分方程式の解全体の空間であるが、コンパクト多様体上ではかなり進んだ一般論がある。その一方で非コンパクトな空間の場合には個別の状況に応じた構成が必要とされる。ここではコンパクト空間上で成立するモジュライ理論の構成のうち、非コンパクト空間上でも成り立つような側面を4次元多様体に関して抽出し、それをもとに非コンパクト空間上でのモジュライ理論の構成を行なった。特にキャッソンハンドル上でのモジュライ理論の構成を行なった。一般に非コンパクト空間上でのモジュライ理論の構成に関して二つのステップがあり、一つは線形化方程式のフレドホルム理論、もう一つは横断正則性理論である。4次元多様体上ではこれまで前者の構成ができていた。昨年度までの研究により、ある種の漸近的手法を導入することで、後者の横断正則性定理を導いた。この構成の応用として、 $K3$ 曲面上での可微分構造がある種の複雑性を持つことが示された。その複雑量は可微分構造に対応する各樹木の増大度で測ることができるが、ここではそれがあある種の有界型以上であることが示された。

(2) 次に、2変数斉次偏微分方程式全体の間で大域幾何学的な解析を行なった。その手

法にはトロピカル幾何学と呼ばれるスケール変換を用いた。ここで行なった構成によりオートマトンが偏微分方程式の無限遠点に存在するようにとらえることが可能になった。まず異なる2つの偏微分方程式が、無限遠点で同じオートマトンを与えるような同じ無限遠拘束条件を満たすとき、それらの正值解の間に粗い漸近評価が与えられることを発見した。その評価を用いることで、2変数斉次偏微分方程式全体の間で大域解析的な関係式が与えられる。逆に異なる偏微分方程式の対で、上で述べた漸近評価を破る解を構成することで、そのような関係式を持たないような偏微分方程式たちの組を見つけた。これによりその関係式が非自明であることを示した。

特にそのモジュライ空間はかなり複雑な構造を持つことが予想される。例えばこの関係式が推移律を満たすかどうかは各偏微分方程式の構造、特に解の存在が保証されるかどうか大きく依存する。またシステムの偏微分方程式を扱うことで、幾何学的群論に現れるオートマタ群と非線形偏微分方程式とをそのようなスケール変換でつなげることができ、微分方程式を用いた幾何学的群論の研究に突破口を与えた。これに関しては今後のテーマとなる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

(1) T.Kato and S.Tsujimoto, A rough analytic relation on partial differential equations, arXiv:1004.4981v1 math.MG (2010).

(2) T.Kato, Pattern formation from projectively dynamical systems and iterations by families of maps, in the Proceedings of the 1st MSJ-SI, Probabilistic Approach to Geometry, Advanced Studies in Pure Mathematics Vol 57 p 243-262 (2010).

(3) T.Kato, An asymptotic comparison of differentiable dynamics and tropical geometry, Kyoto University preprint (2009).

(4) 加藤 毅 力学系のスケール変換と相互作用グラフ 数理解析研究所講究録 No 1650, p 13-33 (2009).

(5) T.Kato, Deformations of real rational

dynamics in tropical geometry, Geometric and Functional Analysis Vol 19-3, p 883-901 (2009).

(6) T.Kato, Growth of Casson handles and transversality for ASD moduli spaces, Geometry and Topology vol 12 p1265-1311 (2008).

(7) T.Kato, Entropy comparisons and codings on interacting maps, Kyoto University preprint (2006).

[学会発表] (計22件)

(1) 加藤 毅, A rough analytic relation on partial differential equations, 「新たな幾何学探訪研究会」松島 (2010年3月16-18日)

(2) T.Kato, A rough equivalence among partial differential equations, 国際研究集会「沖縄日中幾何学友好研究集会」OIST 沖縄 (2010年1月29日・31日)

(3) T.Kato, A rough equivalence on partial differential equations, 国際研究集会「Geometry and Analysis」パリ第7大学・フランス (2009年12月18・29日)

(4) 加藤 毅, 離散力学系のスケール変換とトロピカル幾何学「研究集会多様体上の微分方程式」富山呉羽ハイツ (2009年10月28日・30日)

(5) 加藤 毅, 離散力学系とスケール変換「研究集会群と力学系に関わる離散幾何学」愛媛大学 (2009年9月1日・4日)

(6) 加藤 毅, トロピカル幾何学と離散力学系「研究集会有理曲面上の複素力学系」九州大学 (2009年8月10日・12日)

(7) T.Kato, An index theory over Casson handles and complexity of smooth structure on K3 surface, (Colloquium at Fudan University, Shanghai, China) (2009年7月7日・11日)

(8) T.Kato, Growth of Casson handles and complexity of smooth structure, 国際研究集会「K-theory, \mathcal{S}^* algebras and topology of manifolds」Chern Institute of Mathematics, Tianjin, China (2009年6月1-5日)

(10) 加藤 毅、力学系のスケール変換 2 「複
雑系セミナー・幾何学コロキウム合同連続講演」
北海道大学 (2009年4月22-24日)

(11) 加藤 毅 離散力学系とトロピカル幾
何学「日本数学会企画特別講演」東京大学 (2
009年3月28日)

(12) T.Kato, A dynamical pattern formation,
tropical geometry and informative entropy,
「国際研究集会 Probabilistic Approach to
Geometry, The Mathematical Society of Japan,
Seasonal Institute」京都大学時計台記念ホー
ル (2008年7月28日-8月8日)

(13) T.Kato, Growth of Casson handles in
K3 surface and Yang Mills gauge theory,
Topology seminar at Aarhus University,
Denmark (2008年9月16日)

(14) T.Kato, Deformation of real rational
dynamics in tropical geometry,
Seminars on geometric group theory,
Universite Paris 7, France (2008年9月
29日)

(15) T.Kato, Growth of Casson handles and
Yang-Mills gauge theory 「第4回日中幾何学友
好シンポジウム」Chern Institute of
Mathematics, 中国天津(2008年12月22
-27日)

(16) T.Kato, Yang-Mills gauge theory over
Casson handles and its applications, Four
dimensional topology, 広島大学(2008年
2月5-7日)

(17) T.Kato, Fundamental groups and
elliptic non linear PDE, 「国際研究集会 Non
commutative geometry」Chern Institute of
Mathematics 天津中国 (2007年8月25-
30日)

(18) 加藤 毅、非コンパクト多様体上のヤ
ンミルズゲージ理論とキャッソンハンドルへの
応用「研究集会 Low dimensional and infinite
dimensional geometry」東京大学玉原セミナー
ハウス (2007年5月25-28日)

(19) 加藤 毅、A pattern formation in
dynamical systems by families of iterated
maps 「研究集会 Tropical geometry and related
topics」北海道大学 (2007年9月10-1
2日)

(20) 加藤 毅、力学系のスケール変換

と相互作用グラフ「(数理解短期共同研究)
可積分系数理の新潮流」(数理解析研究所)
(2007年8月20-22日)

(21) 加藤 毅、ファミリーの写像から可
積分系へ「(春の学校) ランダムから可積分
系へスケール変換によるパターン形成」東北
大学 (2007年1月12-15日)

(21) 加藤 毅、力学系としてのパターン
形成「研究集会非線形と波動」九州大学応用
力学研究所 (2006年11月6-8日)

(22) T.Kato, Symplectic capacity on
infinite dimensional spaces, 「国際研究集
会 Non commutative geometry」京都国際交流
会館 (2006年6月13-16日)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

〔その他〕

特になし。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

加藤 毅(KATO TSUYOSHI)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 20273427

(2) 研究分担者(0)

(3) 連携研究者(0)