

平成22年4月2日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2009

課題番号：18540086

研究課題名（和文） Smith問題とLaitinen予想の研究

研究課題名（英文） Study of Smith's Problem and Laitinen's Conjecture

研究代表者

森本 雅治 (MORIMOTO MASAHARU)

岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：30166441

研究成果の概要（和文）：有限群 G が球面上に不動点が唯2点であるように滑らかに作用している場合の、その2つの不動点の接空間の差をすべて集めてできる実表現環の部分集合を Smith 集合という。本研究では多くの有限群 G に対して Smith 集合を決定した。また Smith 集合に関する Laitinen 予想に対して、その反例を発見し、さらに肯定的に成り立つ有限群の族を見出し、Smith 問題の研究に大きな進展をもたらした。

研究成果の概要（英文）：For a finite group G , the subset of real representation ring consisting of all differences of tangential representations at fixed points of smooth G -actions with exactly two fixed points on spheres is called the Smith set of G . In this research, we computed the Smith sets for many finite groups G . Furthermore, we found counterexamples to Laitinen's Conjecture on the Smith sets as well as a family of finite groups for which the conjecture is valid, which contributed to development of the study of Smith's problem.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
総計	3,500,000	720,000	4,220,000

研究分野：多様体上の変換群論

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：微分トポロジー，変換群，多様体，球面上の作用，Smith 問題，Laitinen 予想

1. 研究開始当初の背景

(1) 1960年代初頭に、P. Smith は有限群 G が球面に唯2つの不動点を持って滑らかに作用しているとき、この2つの不動点での接空間表現は同型であるかという問題を提起し

た。この2つの接空間表現は Smith 同値であると呼ばれる。この Smith 問題に対し、Atiyah-Bott, Milnor は群 G の作用がセミフリーであれば、Smith 問題は肯定的な解答を持つことを示した。また G. Bredon は群 G

の位数が素数冪で、その位数に比べて球面の次元がずっと大きい場合には Smith 問題は肯定的な解答を持つことを示した。さらに、1976年に C. Sanchez は G が奇素数べき位数であれば Smith 問題は肯定的解を持つことを証明した。一方、T. Petrie と Cappell-Shaneson は 1978 年～1985 年にかけて、 G が特殊な奇数位数の可換群や位数 $4n$ ($n > 3$) の巡回群の場合には同型でない Smith 同値な表現の対が存在することを証明した。

(2) Smith 問題の研究があまり進展しない時期があったが、1996 年に B. Oliver が Disk 上の滑らかな作用の不動点集合として得られる多様体とその法ベクトル束の条件を決定した。また森本雅治は同変手術理論の研究により、Oliver 群 G の不動点集合の削除・追加の定理を与えた。これらの研究がもとなり、1998 年に E. Laitinen は Oliver 群 G の素数べきでない位数を持つ要素の実共役類の個数 $a(G)$ が 2 以上であるならば、同型でない Smith 同値な表現の対が存在するという予想を提唱した。実際、Laitinen-Pawalowski は G が完全群の場合にはこの予想が正しいことを証明した。また、Pawalowski-Solomon は $a(G)$ が 0, 1 である有限群 G をすべて決定し、Laitinen 予想の研究を行った。

2. 研究の目的

Smith 同値な表現 V, W の差 $V - W$ をすべて集めてできる表現環の部分集合を Smith 集合とよび、 $\text{Sm}(G)$ と書く。Smith 集合の要素 $V - W$ で V, W を素数べき位数の部分群に制限すると同型になるものすべて集めてできる部分集合を主 Smith 集合とよび、 $\text{PSm}(G)$ と書くことにする。この研究の直接的な目的は

- ① $\text{Sm}(G), \text{PSm}(G)$ の関係を明らかにする：つまり差集合 $\text{Sm}(G) - \text{PSm}(G)$ がどのような集合であるかを明らかにする
- ② $\text{PSm}(G)$ の計算手法を見出す
- ③ Laitinen 予想が成り立つ有限群の族を

見出す

- ④ Laitinen 予想の反例を見出すことであつた。さらに、これらの研究を通して、球面上の作用の特徴を明らかにすること、同変手術理論を発展させることをも目指した研究であつた。

3. 研究の方法

(1) この研究で用いた主要な理論は

- ① 有限群の表現論
- ② 有限群の同変コボルディズム理論
- ③ 有限群の同変ホモトピー理論
- ④ 有限群の同変手術理論

であつた。研究手法を一言で言えば、まず Smith 同値であるための必要条件を ① と ② を用いて研究し、得られた必要条件が十分条件であることを示すために ③, ④ を用いた。

(2) 研究目的①～④のそれぞれについてその研究手法を概説しよう。

- ① Bredon のコホモロジーを用いた素数冪位数の群作用の研究により、群の位数に比べて表現の次元が高いと、Smith 同値ならば表現として同型であることが知られている。この結果と Sanchez の定理を組み合わせると差集合 $\text{Sm}(G) - \text{PSm}(G)$ を研究する。
- ② Oliver の構成方法を用いてディスク上の作用を構成し、これのダブルをとって球面上の作用を作る。この球面上の作用から、森本の同変手術理論を用いて必要な不動点のみ残し、他の不動点を取り除く。このような構成方法で、どれだけ豊富に Smith 同値な表現の対を得られるか研究する。一方で、同変コボルディズム理論などを用いて、Smith 同値である表現の対に対する必要条件を調べる。この下からの評価と上からの評価により Smith 集合の決定を試みる。
- ③ 上に述べた Smith 同値な表現の組を構成する手法により Smith 集合が非自明と

なる有限群 G の族を見出す。

- ④ すでに Pawalowski-Solomon により Laitinen 予想が成り立つか否か問われている具体的な有限群がある。これらの群について Smith 集合を計算する。また位数が 2000 以下の有限群についてもコンピュータソフト GAP を利用して、Smith 集合がどのようなものであるか研究する。この具体的な計算の中から、Laitinen 予想の反例を見出す。

4. 研究成果

本研究において以下の成果をあげることができた。

(1) $\text{Sm}(G)$ と $\text{PSm}(G)$ の関係については、Bredon の定理と Petrie のアイデアにより、差集合 $\text{Sm}(G) - \text{PSm}(G)$ は有限集合であることを証明した。

(2) $\text{PSm}(G)$ の計算手法。Petrie, Cappell-Shaneson, Laitinen-Pawalowski, Pawalowski-Solomon の研究で構成された G の球面 S 上の作用は指数が素数である正規部分群 N については、 N -不動点集合 $F(N, S)$ の各連結成分の次元は等しいもののみであった。しかし、森本は $F(N, S)$ の連結成分が異なる次元を持つような作用の構成方法を Oliver の理論を応用して考案した。これにより、

- ① Nilquotient が位数 2 や 3 の gap Oliver 群
- ② 非自明な完全群 K と奇数位数の可換群 A の直積 G

などに対して、 $\text{PSm}(G)$ を決定 (計算) した。

(3) Laitinen 予想の肯定的な族。森本は $G = \text{P}\Sigma\text{L}(2, 27)$ の $\text{Sm}(G)$ を決定し、これと Pawalowski-Solomon の結果により、非可解 gap 群 G に対しては Laitinen 予想が肯定的に成り立つことを証明した。この結果は角

俊雄により $\text{Aut}(A(6))$ 以外の非可解群については Laitinen 予想 が肯定的に成り立つという結果に一般化された。

(4) Laitinen 予想の反例。森本は $G = \text{Aut}(A(6))$ に対しては $a(G) = 2$ であるが、 $\text{Sm}(G) = 0$ であることを証明した。これは Laitinen 予想に対して初めて発見された反例である。 $\text{Aut}(A(5))$ は非可解群で nongap 群であるが、角 俊雄の研究に触発されて、森本は古藤 昭弘や祁 艶と共に、可解な gap 群でも Laitinen 予想の反例を発見した。

また球面上の滑らかな作用の研究には、同変ホモロジー理論の開発が必要であると強く認識した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① Masaharu Morimoto: Nontrivial $P(G)$ -matched S -related pairs for finite gap Oliver groups, accepted by J. Math. Soc. Japan 62 (2010), 623-637, 査読有.
- ② Masaharu Morimoto and Yan Qi: Study of the Smith sets of gap Oliver groups, 数理解析研究所講究録 No. 1670 (2009), 126-139, 査読無.
- ③ Masaharu Morimoto: Tangential representations at fixed points, 数理解析研究所講究録 No. 1612 (2008), 41-49, 査読無.
- ④ Akihiro Koto, Masaharu Morimoto and Yan Qi: The Smith sets of finite groups with normal Sylow 2-subgroups and small nilquotients, J. Math. Kyoto Univ. 48 (2008) No. 1, 219-227, 査読有.
- ⑤ Masaharu Morimoto: Smith equivalent $\text{Aut}(A_6)$ -representations are isomorphic, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 3683-3688, 査読有.
- ⑥ Masaharu Morimoto: Fixed-point sets of smooth actions on spheres, J. K-Theory 1 Issue 01, 95-128, 2008, 査読有.
- ⑦ Masaharu Morimoto: Construction of smooth actions on spheres for Smith equivalent representations, 数理解析研究所講究録 no. 1569 (2007), 52-58, 査読無.

⑧ Masaharu Morimoto: The Smith problem and a counterexample to Laitinen's conjecture, 数理解析研究所講究録 no. 1517 (2006), 25-31, 査読無.

[学会発表] (計 9 件)

① 森本 雅治: Study of Smith equivalent representations, 第 36 回変換群論シンポジウム, 2009 年 12 月 11 日, 大阪私立大学.

② 森本 雅治: On the Smith equivalent representations of Oliver groups, Group Actions and Homogeneous Spaces, 2009 年 9 月 8 日, Comenius 大学 (スロバキア).

③ 森本 雅治: Study of the Smith sets of gap Oliver groups, 変換群論の新たな展開, 2009 年 8 月 20 日, 京都大学.

④ 森本 雅治: A new theorem to find Smith equivalent representations, 第 35 回変換群論シンポジウム, 2008 年 11 月 13 日, 岡山県立図書館.

⑤ 森本 雅治: Tangential representations of smooth 2-fixed-point actions, Conference on Algebraic and Geometric Topology, 2008 年 6 月 12 日, Gdansk 大学.

⑥ 森本 雅治: Tangential representaitons at fixed points, 変換群論の幾何とその周辺, 2008 年 5 月 20 日, 京都大学.

⑦ 森本雅治: Laitinen's conjecture for nonsolvable gap groups, First Joint International Meeting between the American Mathematical Society and Polish Mathematical Society, 2007 年 8 月 3 日, Warsaw 大学.

⑧ 森本 雅治: Construction of smooth actions on spheres for Smith equivalent representations, 変換群論とその応用, 2007 年 5 月 29 日, 京都大学.

⑨ 森本 雅治: A counter example to Laitinen's conjecture, Groups in Geometry and Toplogy, 2006 年 9 月 7 日, Malaga 大学.

[その他]

ホームページ等

<http://www.ems.okayama-u.ac.jp/appl/morimoto/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森本 雅治 (MORIMOTO MASAHARU)
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 30166441

(2) 研究分担者

中島 惇 (NAKAJIMA ATSUSHI)
岡山大学・大学院自然科学研究科・名誉教授

研究者番号: 30032824

(H20→H21: 連携研究者)

池畑 秀一 (IKEHATA SHUICHI)
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号: 20116429

(H20→H21: 連携研究者)

島川 和久 (SHIMAKAWA KAZUHISA)
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号: 70109081

(H20→H21: 連携研究者)

(3) 連携研究者