

平成21年 5月11日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2008

課題番号：18540088

研究課題名（和文）写像の特異点とホモトピー原理の応用の研究

研究課題名（英文）Singularities of maps and applications of the homotopy principles

研究代表者

安藤 良文（ANDO YOSHIFUMI）

山口大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：80001840

研究成果の概要：代表者の研究による閉多様体から球面への写像度0の折り目写像のコボルズム群は球面の安定ホモトピー群と同型になるという定理をさらに一般化した。特異点の K -不変開集合に対する h -principle を確立した。多様体 P への多様体からの高次特異点の類に属する特異点を許容する可微分写像のコボルディズム群に対応して導入したある安定ホモトピー群を h -principle を使って解析することにより、このコボルズム群の分類空間を決定した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	600,000	3,700,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：特異点、可微分写像

1. 研究開始当初の背景

一定の類に属するコンタクト不変な特異点のみをを許容する多様体の間の微分可能な写像に関する h -principle について説明する：Gromov, duPlessis 等の今では古典的になった有名な定理があった。1972年の

Eliashberg による折り目写像に関する h -principle があった。その後は、研究代表者による Morin 写像に関する h -principle があった。一方では、definite な折り目写像に関しては、 h -principle が成立しないことも

Bruhat-deRham, 佐伯等の結果からよく知られていた。

一定の多様体 P への多様体からの高次特異点を許容する微分可能な写像に対するコボルズム群について説明する：多くの著者によりこのコボルズム群の研究はされていた。特筆すべきは, **target** の次元が **source** の次元より高い場合には, Rimanyi-Szucs の超次元的方法によって, **simple** 特異点を許容する微分可能な写像に対するコボルズム群の分類空間が構成されていた。さらに, Kazaryan により, その方向での研究は, さらに, 進められていた。研究代表者はこの分類空間は **h-principle** が成立する場合には, 純粋にホモトピー論的な議論により構成可能であると予想した。

2. 研究の目的

上記のコボルズム群を考えると, 研究代表者が予想したようにそのコボルズム群を表現するある安定ホモトピー群が決定される。この安定ホモトピー群から無限次元ループ空間となる分類空間がホモトピー論的に構成することも可能になった。この空間のトポロジーを調べて, 様々な可微分写像の不変量が構成される。

実際に, 折り目特異点の場合、特に, 同次元の多様体間の写像度が一定値の折り目写像については具体的な既知の不変量があらわれる。つまり, トポロジー分野の従来から知られている多くの重要な概念： P および球面の無限次元ループ空間、球面の安定ホモトピー群、**smooth** カテゴリーでの **surgery theory** と **surgery obstructions**、**Kervaire invariant** 等と密接に関係があることが証明された。一般の場合に, これらの不変量が特異点のどのような幾何学的性質を反映しているかを研究することは大変興味深い内容がある。

上記の研究は, 高次特異点に対して継続的に実施してきた研究代表者による研究の成果である。現在では, 球面の安定ホモトピー群の構造と高次の特異点との関係を研究する状況になった。従来から知られていた分類空間 F とこのコボルズム群の分類空間の関係を調べる研究課題があった。

Mather の **nice range** の外の高次特異点の分類やそのトム多項式の計算方法などの難問を解決する必要性の重要性を具体的に指摘するものでもある。その研究の推進を目指す目的を明確にした。写像の特異点について, 種々の状況の下でトポロジー的な大域的不変量を生成する方法を提供するとともに, その方向性も明確にした。

具体的に, **Thom-Boardmann** 特異点 **ADE** 特異点、**Mather** の不安定特異点、**unbounded codimension** の特異点などの性質を調べる興味深い研究課題に意味を与える。

3. 研究の方法

下記に述べた構想の下に研究を進めた。本研究にはこれらのトポロジー、微分幾何学、代数学の広範な領域の専門とかがわりが深く、研究連絡・研究発表のための研究集会を開くなどをした。

(1) 同次元多様体間の球面への折り目写像のコボルズム群は球面の安定ホモトピー群と同型になる。このことを使って, 球面の安定ホモトピー群の元を特異点によって評価することが可能になった。この結果をさらに高次元に進める研究を行った。

(2) 多様体間の一定の与えられた特異点の類の特異点を許容する **smooth** な写像に対して, **target** を一定の多様体 P にして, コボルズム類の全体の作る群を評価するある安定ホモトピー群を決定した。

(3) 上記の安定ホモトピー群から分類空間を構成するための **h-principle** が成立するこ

とを証明した。

(4) (2)、(3)の結果から、ホモトピー論的な解析をして、分類空間を構成する手順を見つけた。

(5) 2つのホモトピー型が一致する多様体を考えよう。2つの多様体は同じ者でも良い。この両者の多様体間のホモトピー同値な smooth な写像はどのような特異点を持つのかを、代表者の過去の成果と Sullivan の手術理論を組み合わせて研究した。Mather の不安定特異点、unbounded codimension の特異点を持たざるを得ない例がやはり多量に存在することを見つけた。

4. 研究成果

(1) 一定の多様体 P への多様体からの高次特異点を許容する微分可能な写像に対して、このコボルズム類の全体の作る群を考えある安定ホモトピー群を決定した。

(2) ジェット空間内の K -普遍的な開集合に対するホモトピー原理を、研究代表者の長年のホモトピー原理の研究の成果の集大成として、大幅に進展させた。この結果は多くの重要な応用をもたらす。

(3) 上記の群の評価の方法を研究するためにその分類空間を導入した。この分類空間の構成はホモトピー論的な構成である。特に、折り目写像に関して相当の研究が進んでおり、その群の決定によりある種の不変量の構成を目指すことが視野に入ることになった。つまり、トポロジー分野の従来から知られている多くの重要な概念： P および球面の無限次元ループ空間、球面の安定ホモトピー群、smooth カテゴリーでの surgery theory と研究対象は広がった。特に、同次元多様体間の場合には、球面の安定ホモトピー群との関わりからこの分類空間の位相の研究進めた。関連する Thom-Boardman 特異点のトム多項式の研究と非単純特異点とある特性類の研究を

進めて、今後の研究につなげる準備をした。

(4) ジェット空間のコンタクト不変領域や Thom-Boardman 多様体の Thom 多項式の計算法の成果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

(1) Yoshifumi Ando, Cobordisms of maps with singularities of given class, Algebraic and Geometric Topology, 8, 2008, 1989-2029.

(2) Yasuyuki Miyazawa, A multi-variable polynomial invariant for virtual knots and links, Journal of Knot Theory Ramifications, 17, 2008, 1311-1326.

(3) Yoshihisa Sato, 2-spheres of square -1 and the geography of genus -2 Lefschetz fibrations, Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, accepted for publication.

(4) Jun-ichi Inoguchi, Hiroo Naitoh, Grassmann geometry on the 3-dimensional unimodular Lie groups I, Hokkaido Mathematical Journal, accepted for publication.

(5) Yoshifumi Ando, A homotopy principle for maps with prescribed Thom-Boardman Singularities, Transactions of the American Mathematical Society, 359, 2007, 489-515.

(6) Yoshifumi Ando, The homotopy principle for maps with singularities of K -invariant class, Journal of Mathematical Society of Japan, 59, 2007, 557-582.

(7) Katsuhiko Komiya, The decomposability of Z_2 -manifolds in cut-and-paste

equivalence,

Tokyo Journal of Mathematics, 30, 2007, 285-291.

(8) Yoshifumi Ando, Stable homotopy groups of spheres and higher singularities, Journal of Mathematics of Kyoto University, 46, 2006, 147-165.

(9) Yoshifumi Ando, Nonexistence of homotopy equivalences which are C^{∞} stable or of finite Codimension,

Topology and its Applications, 153, 2006, 2962-2970.

(10) Yasuyuki Miyazawa, Magnetic graphs and an invariant for virtual links, Journal of Knot Theory Ramifications, 152, 2006, 1319-1334.

[学会発表] (計 5 件)

(1) 宮澤康行、 $H(2)$ -unknotting number of a knot、

研究集会「Intelligence of Low Dimensional Topology 兼拡大 K00K セミナー」、2008 年 10 月 8 日、大阪市立大学。

(2) 安藤良文、大域的特異点論の問題、研究集会「大域的特異点論の問題」、2007 年 10 月 6 日、近畿大学。

(3) 佐藤好久、種数 2 Lefschetz 束空間の特異ファイバー和分解に関する Stipsicz 予想、日本数学会トポロジー分會、2007 年 9 月 22 日、東北大学。

(4) 安藤良文、The homotopy principle for maps with singularities of given K -invariant class,

2006 年 6 月 14 日、山口大学大学会館会議室。

(5) 安藤良文、Stable homotopy groups of spheres and higher singularities,

2006 年 6 月 15 日、山口大学大学会館会議室

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等 なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

安藤良文 (ANDO YOSHIFUMI)

山口大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：80001840

(2) 研究分担者

小宮克弘 (KOMIYA KATSUHIRO)

山口大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：00034744

宮沢康行 (MIYAZAWA YASUYUKI)

山口大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：60263761

内藤博夫 (NAITOH HIROO)

山口大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：10127772

渡辺 正 (WATANABE TADASHI)

山口大学・教育学部・教授

研究者番号：10107724

佐藤好久 (SATO YOSHIHISA)

山口大学・教育学部・准教授

研究者番号：90231349

(3) 連携研究者 なし

