

平成 21 年 5 月 26 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540089

研究課題名 (和文) 局所化されたスペクトラムのホモトピー群の研究

研究課題名 (英文) Study on homotopy groups of localized spectra

研究代表者

下村 克己 (SHIMOMURA KATSUMI)

高知大学・教育研究部自然科学系・教授

研究者番号：30206247

研究成果の概要：

図形に代数的な対象を、一つの図形を連続的な変形により、もう一つの図形に変形できるとき同じになるように対応させると、代数的な対象を計算することで、二つの図形が変形後に同じになるかどうかを判断できる。本研究ではこの代数的な対象として局所化した可換環を考えたホモトピー群やホモロジー群を考える。図形のままで計算が困難なので、図形をある意味の理想形であるスペクトラムに置き換えて考察した。成果としては、いくつかの基本的なスペクトラムのホモトピー群を決定した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	660,000	3,960,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学, 安定ホモトピー論

1. 研究開始当初の背景

ホモトピー論では CW 複体のなすホモトピー圏 CW の研究を行っている。この圏の本質的な性質を探るためそれを懸垂関手 $\Sigma: CW \rightarrow CW$ で局所化して得られるスペクトラムのなす安定ホモトピー圏 S を考える。これは素数 p で局所化した $S_{(p)}$ を考え

ばよく、さらにスペクトラム E に関する Bousfield 局所化した安定ホモトピー圏 L_E を考えると、H. Miller, D. Ravenel, S. Wilson により導入された chromatic の理論により、M. Hopkins などが、これらの圏のうち Johnson-Wilson スペクトラム $E(n)$ により局所化された圏 $L_{E(n)}$ を理解すれば $S_{(p)}$ がわかると予想している。その

ため、圏 $L_{E(n)}$ の研究には $E(n)$ -homology 群 $E(n)_*(X)$ が $E(n)_*(E(n))$ -余加群として有限複体の $E(n)$ -ホモロジー群と同型であるようなスペクトラム X を考え、それらを分類するというアプローチがある。特に $E(n)_*(X)$ が $E(n)_*(E(n))$ -余加群として球面の $E(n)$ -ホモロジー群と同型であるときは可逆スペクトラムとして知られており、それは球面のホモトピー群に収束する $E(n)$ -Adams スペクトル系列の E_r 項 $E_r^{r,r-1}$ の直和で分類することができた。

2. 研究の目的

研究開始当初の背景で述べたように、局所化されたホモトピー群を計算するための $E(n)$ -Adams スペクトル系列の E_r 項は分類問題に応用できることが予想できる。本研究の目的はこの予想が正しいことを、球面以外の有限複体に対しての $E(n)$ -Adams スペクトル系列の E_r 項を計算することにより確かめることであった。

3. 研究の方法

研究方法としては基本は計算である。ホモトピー群やホモロジー群の決定にはいろいろな型のスペクトル系列が有効である。すでに良く知られたスペクトル系列を用いたり、この問題だけに有効なスペクトル系列を構成する。既に知られている定理や公式だけでは原則スペクトル系列の E_r 項の決定には至らない。新しい方法を見出すための様々な計算を行い、結果を解析することから始める。さらに、スペクトル系列ではその微分の計算も重要であるが、一般的な方法は有効でない場合が多い。これらの状況の下で、必要なスペクトル系列の微分の計算方法を模索していく。そのためにはコンピュータが有効である。さらに計算結果の解析には他の専門家の意見も重要である。一つは研究分野の近い分担者、連携研究者たちのコメントであり、一つは専門の離れた研究者たちの研究結果である。これらに触れるために、旅費が使われる。

4. 研究成果

重要な結果の一つは、Johnson-Wilson のスペクトラム $E(n)$ 以外のスペクトラム E で局所化したスペクトラムに関する結果である。スペクトラムを Bousfield 類で分類し、それに acyclicity で束にした、連携研究者の大川による集合を考える。この結果では homotopy 論では基本である Eilenberg-MacLane スペクトラム $H\mathbb{Z}/p$ の類と同じか大きい類を代表するスペクトラム E に関する局所化では係数環 E_* と同型な E_* -homology 群を持つスペクトラムは球面以外に無いことを示した。

この結果は考えやすい連結なスペクトラムをすべて含んでおり、普通に考える範囲では Johnson-Wilson のスペクトラム $E(n)$ のときのような E_* -homology 群で分類できないスペクトラムは存在しないことを示している。結果自体は専門家の間ではある程度予想されたものであったが、標準的な方法で解決されたのはある程度のインパクトがあると思われる。

この結果から今後の展望として、 $H\mathbb{Z}/p$ より小さい、球面の Brown-Commenetz の双対 I の類より大きい類を代表するスペクトラムについても同様の結果が得られるとの予想を考察することになる。また、 I の類は極小であると予想されているので、 I の類から始まる増加列に関するスペクトラムに対しては考えているようなスペクトラムは存在しないと思われ、他の極小なスペクトラムを基にした増加列について考察していく問題にも発展する。

二つ目は 2 を法とした Moore スペクトラム M_2 に関するものである。Ravenel のスペクトラム $T(m)$ に対して、 $E(2)$ で局所化した Moore スペクトラム L_{M_2} の $T(m)_*$ -homology 群の決定を試みた。これはいまだ未解決である素数 2 での $E(2)$ で局所化した球面のホモトピー群の決定問題への一つのアプローチであり、圏 $L_{E(2)}$ の理解への重要な情報を与えるものである。

$T(0)_*$ -homology 群は安定ホモトピー群であり、 BP_* -homology はよく知られている。 $T(1)_*$ -homology 群は構造が複雑で、その一部しか決定できなかったが、 $m > 1$ の時は、決定できた。目的の安定ホモトピー群までにはあと少しの所であった。圏 $L_{E(2)}$ の理解のための $E(2)$ で局所化した M_2 の安定ホモトピー群の決定問題は今後の研究課題として残った。

また、分担者による結果は上でのべた研究にあらわれている色々なスペクトル系列の E_2 -項にかかわるものであり、今後のさらな

る研究の進展の後には残っている研究課題の解決に重要な役割を果たすと期待できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① 疋田瑞穂、Singer's formula for the Steenrod algebra, Hiroshima Mathematical Journal, 39, 123—131, 2009, 査読有
- ② 疋田瑞穂、Note on the tail acyclic conjecture, Journal of Life and Environmental Sciences, 11, 1—7, 2009, 査読有
- ③ 市木一平、下村克己、The modulo two homotopy groups of the L_2 -localization of the Ravenel spectrum, Cubo Mathematical Journal, 10, 43—55, 2008, 査読有
- ④ 中井洋史、An algebraic generalization of Image J, Homology, Homotopy and Applications, 10, 321—333, 2008, 査読有
- ⑤ 中井洋史、下村克己、On the homotopy groups of $E(n)$ -local spectra with unusual invariant ideals, Geometry & Topology Monographs, 10, 319—332, 2007, 査読有
- ⑥ 上谷陽介、下村克己、Picard groups of some local categories, Publications of Research Institute of Mathematical Science, Kyoto University, 43, 303—314, 2007, 査読有
- ⑦ 疋田瑞穂、Tail Singer's formulas, The Bulletin of Hiroshima Prefectural University, 19, 41—46, 2007, 査読無
- ⑧ 市木一平、下村克己、王向軍、On subgroups of $\pi_*(L_2T(1) \wedge M(2))$ at the prime two, Bulletin of the Mexican Mathematical Society, 13, 207—230, 2007, 査読有

[学会発表] (計 8 件)

- ① 北濱理恵、下村克己、Ravenel のスペクトラム $T(m)$ に関する Ext 群について、日本数学会中国・四国支部例会、2009 年 1 月 25 日、福岡市 福岡大学セミナーハ

ウス

- ② 北濱理恵、下村克己、Chromatic Ext groups $\text{Ext}_{T(m+1)}^0(BP_*, M^{1,n})$, 福岡ホモトピー論セミナー、2009 年 1 月 10 日、福岡市 福岡大学セミナーハウス
- ③ 中井洋史、 $T(m)$ スペクトラムのホモトピー群の周辺、ホモトピー論シンポジウム、2008 年 12 月 6 日、香川県高松市 サンポート高松
- ④ 中井洋史、On the structure of cohomology groups of Weierstrass Hopf algebroids, 福岡ホモトピー論セミナー、2007 年 12 月 22 日、福岡市 福岡大学セミナーハウス
- ⑤ 中井洋史、On β -elements in the Adams-Novikov spectral sequence, ホモトピー論シンポジウム、2007 年 11 月 16 日、石川県金沢市 金沢歌劇座
- ⑥ 中井洋史、Calculations for some Hopf algebroids related to topological modular form, International Conference (Complex cobordism in homotopy theory: its impact and prospects), 2007 年 3 月 12 日、アメリカ Johns Hopkins 大学
- ⑦ 下村克己、中野大輔、Note on the homotopy groups of $L_2T(m)/v_1$, ホモトピー論シンポジウム、2006 年 11 月 29 日、愛媛県松山市 愛媛大学
- ⑧ 中井洋史、An algebraic generalization of Image J in the Adams-Novikov spectral sequence, ホモトピー論シンポジウム、2006 年 11 月 29 日、愛媛県松山市 愛媛大学

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

該当なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

下村 克己 (SHIMOMURA KATSUMI)
高知大学・教育研究部自然科学系・教授
研究者番号：30206247

(2) 研究分担者

大川 哲介 (OOKAWA TETSUSUKE)
広島工業大学・工学部・准教授
研究者番号：60116548 (2006～2007 年度)
疋田 瑞穂 (HIKIDA MIZUHO)
県立広島大学・生命環境学部・教授
研究者番号：80156570
中井 洋史 (NAKAI HIROFUMI)
武蔵工業大学・知識工学部・准教授
研究者番号：80343739

(3) 連携研究者

大川 哲介 (OOKAWA TETSUSUKE)
広島工業大学・工学部・准教授
研究者番号：60116548 (2008 年度)