

平成 22 年 4 月 1 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006 ～ 2009

課題番号：18540097

研究課題名 (和文) 3次元多様体の位相幾何的および双曲幾何的研究

研究課題名 (英文) Research of 3-manifolds by topological and hyperbolic geometric method

研究代表者

相馬 輝彦 (SOMA TERUHIKO)

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：50154688

研究成果の概要 (和文)：線織ラップ曲面という概念を導入し、これを使って Marden 予想の簡明な別証明をつけることができた。コンパクト曲面群と同型の基本群を持つ双曲 3 次元多様体の列の極限となるような双曲多様体の幾何的分類を完成させることができた。特に、2 つの幾何的極限多様体が同相であり同じエンド不変量をもつとき、その同相写像は等長写像に固有ホモトピックであることを証明した。

研究成果の概要 (英文)：I introduced the notion of ruled wrappings and by using it gave a simple alternative proof of Marden's conjecture. We completed the geometric classification of geometric limits hyperbolic manifolds which are given by geometric limits of sequences of hyperbolic 3-manifolds with fundamental groups isometric to compact surface groups. In particular, we proved that, if these two geometric manifolds are homeomorphic and have the same end invariants, the homeomorphism is properly homotopic to an isometry.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	800,000	240,000	1040,000
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総計	2,900,000	600,000	3,500,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学・微分トポロジー

1. 研究開始当初の背景

本研究者の専門分野は 3 次元多様体論である。3 次元開多様体の最重要予想であった「幾何化予想」がペレルマンによって解決されたが、本研究の開始同時はちょうど、彼の証明が正しいことが認識された頃である。しかし

その証明が微分幾何的な手法を使ったものなので、より位相幾何的または双曲幾何的な手法を使った幾何化予想へのアプローチが考えられていた頃である。またこの少し後から 3 次元開多様体に関する最重要予想である Marden 予想やエンディング・ラミネーショ

ン予想も解決した。従ってこれからはこれらの予想の解決を基礎として、3次元多様体のより細部に関する研究が重要であることが認識されるようになってきた。

2. 研究の目的

研究の主たる目的は、3次元多様体の幾何的構造や位相的構造を調べることにあった。特に、双曲構造をもつ次元開多様体の剛性定理（エンディング・ラミネーション予想）の別証明や幾何的極限の分類の完成を目標とした。双曲構造以外の幾何的構造をもつ3次元多様体にザイフェルト多様体がある。ザイフェルト閉多様体で、底空間が2次元双曲軌道体であるようなものの微分同相群のホモトピー型の決定することおよびその応用を考えることも研究目的の一つとする。また、3次元多様体上の微分同相写像の力学系も研究する。特に、現在注目されているヘテロ次元サイクルをもつ微分同相写像がヘテロ次元接触を持つとき、どのような分岐を起こすかを研究する。

3. 研究の方法

本研究では、3次元多様体を研究を双曲幾何的手法と標準的な3次元位相的手法を組み合わせ使用。

(1) 双曲3次元多様体内の曲面を表現するのに線織ラップ曲面を使う。

これは双曲曲面の概念を一般化した一般化したCAT(-1)構造をもつ空間である。このような曲面の列が、双曲多様体のエンドに出て行くことを使って、そのエンドが位相的にタイムであること(Marden 予想)を証明することができた。この線織ラップ曲面は、境界が圧縮不可能な双曲多様体論で有効に使われるプリーツ曲面の一般化である。プリーツ曲面の場合は双曲構造をもつが線織ラップ曲面は一般には双曲構造をもたない。しかし、CAT(-1)構造をもつので、プリーツ曲面と同様な性質が成り立つ。線織ラップ曲面は、Marden 予想以外にも、圧縮可能なエンドのより精密な構造を調べるのに有効に使うことができることが分かっている。この曲面を使う議論により、エンディング・ラミネーション予想の一般化、稠密予想の別証明、Thurston の代数的収束予想の別証明などが可能になることが分かっている。

(2) 曲線複体内の強張測地線のヒエラルキーを垂直アニュラスの和集合として表現する。

このような、ヒエラルキーの3次元化（可視化）により、曲線複体の研究が非常に簡やかでできた。特にエンディング・ラミネーション予想の中核をなす双リプシッツ・モデル定理を証明する上で有効であった。

(3) 本研究の複数の箇所で、最小面積曲面の

理論を使う。

まず、エンディング・ラミネーション予想の証明段階で、Minsky によって与えられたリプシッツ写像が同相写像にホモトピックであることを証明する必要がある。そのとき、モデル多様体のブリックをつなぐジョイント上で、もとのリプシッツ写像が埋め込みであるように変形しなければならない。このような変形を（一般には）無限個あるジョイント上で同時に行うには、写像をジョイントに制限した写像が最小面積写像であるようにするとよい。このような写像の存在は、Freedman-Hass-Scott の定理によって保証される。しかし、このようにして構成できた同相写像は既にリプシッツ写像ではない可能性がある。そこで今度は、ジョイント境界部分の値を固定した写像の中での最小面積写像を使うことによって、リプシッツ性を保存したまま同相写像を構成することができた。

さらに、最小面積曲面論は、ザイフェルト多様体上 M の微分同相写像の研究にも役だった。まず、ザイフェルト多様体の正則ファイバーの基本群に同伴する正則被覆を考える。そのとき、本研究代表者の結果(T. Soma, Trans. Amer. Math. Soc. 2006)を利用すると、被覆空間に固有に埋め込まれた開アニュラスの集合で被覆変換で不変なものが存在する。また、境界がこれらのアニュラスの和集合に含まれる開トーラス体で被覆変換に関し同変なものが存在する。このトーラス体の被覆射影による像も M 内のトーラス体 V であり、 M から M への任意の微分同相写像をアンビエント・アイソトピーで変形して、 V が保存できるようにする。 V の M における補集合はハーケン多様体であるから、 M 上の微分同相写像群の研究をよりわかりやすいハーケン多様体上の微分同相写像の研究に帰着できた。

4. 研究成果

(1) Marden 予想とは、有限生成基本群を持つ双曲3次元開多様体 M は位相的にチームであろうという主張である。ここで、 M が位相的にチームであるとは、 M がコンパクト多様体の内部と同相になることである。この予想はすでに、I. Agol と D. Calegari-D. Gabai によって独立に証明されている。本研究により、この予想はより簡明に証明できた。そこで使った概念が線織ラップ曲面という概念である。これは「曲面」という名前がついているが、厳密にはコンパクト曲面から双曲多様体 M への弧長に関し局所的に等長な写像であり、W. Thurston によって導入されたプリーツ曲面を一般化したものである。この線織ラップ曲面は、Marden 予想の証明に限らず、 M が圧縮可能なエンドを持つ場合の研究と至る所で

重要な役割を担うものと考えられる。特に次の(2)で説明する幾何的極限多様体に関する研究成果やエンディング・ラミネーション予想を圧縮可能なエンドを持つ場合に拡張する場合に有効に活用できることも分かっている。この結果は、すでに論文：

T. Soma, Existence of ruled wrappings in hyperbolic 3-manifolds, *Geom. Topol.* 10 (2006) 1173-1184

として発表されている。

(2) コンパクト曲面 S にホモトピー同値な双曲 3 次元多様体に関する双リプシッツ定理の証明の簡易化には成功した。そのとき、曲線複体内の強張測地線のヒエラルキーを $S \times R$ 内の垂直アニュラスの和集合という幾何的対象として表した。また、Freedman-Hass-Scott (1983) の最小面積理論を有効に使うことにより、この定理の証明が直観的にわかりやすい形になった。特に、ヒエラルキーの幾何的な実現により、双リプシッツ・モデルが直接的に定義できるようになった。この簡易化により、双リプシッツ・モデル体をもっと一般的な双曲 3 次元多様体でも成り立つように拡張することも容易に分かる。この結果は、論文：

T. Soma, Geometric approach to Ending Lamination Conjecture

としてまとめ現在専門誌に投稿中である。

(3) 3 次元双曲開多様体の幾何的極限の幾何的および位相的分類について多くの新しい結果が得られた。この研究は、大鹿健一氏(大阪大学教授)との共同研究である。まず最初に、双曲多様体が $S \times R$ に同相な場合から考えた。このような多様体の列 $\{N_n\}$ で双曲多様体 N に幾何的に収束するものを考える。このとき、 N がみたすべき位相的・幾何的必要条件を見つけた。このとき N は $S \times R$ に位相的に埋め込むことができ、さらにブリック多様体の構造をもつ。たしかに各 N_n は $S \times R$ に同相であるが、 N が $S \times R$ に位相的に埋め込むことができるという事実、その直接的な帰結ではなく、詳細な議論が必要であった。本研究を通して、幾何的極限多様体 N は一般には非常に複雑な位相構造を持つことが分かった。実際 N は無限個の位相的チーム・エンドと無限個のワイルド・エンドを同時に持つようなものも存在する。位相的チーム・エンドとは曲面 \times 半直線という位相的な構造を持っているエンドである。このエンドが幾何的に有限なときは無限遠境界の等角構造でもってエンド不変量を定義し、幾何的に無限なときはエンディング・ラミネーションでもってエンド不変量を定義する。しかし、ワイルド・エンドは非常に複雑な位相構造を持っており、適当なエンド不変量が定義できない。従って、ワイルド・エンドに関してはそのエンド(の近傍)の位相型をエンド不変量と考え

る。逆に、上記の必要条件をみたす双曲多様体は、上記のような双曲多様体の列の幾何的な極限になることも示した。

さらに、本研究者はこのような幾何的極限多様体に関し、エンディング・ラミネーション定理が成り立つことも証明した。その証明の概略を述べる。まず、 $S \times R$ 型の双曲多様体の列 N_n が幾何的極限 N を持つと仮定する。このとき、各 N_n と双リプシッツとなるブリック多様体 M_n を構成する。まず、 N と同じブリック構造を持つブリック多様体で、各ブリックが Y. Minsky 型計量を持つものを考える。この計量は、 M_n のエンド不変量から一意的に決まる。さらに、Minsky のリプシッツ・モデル定理を一般化させ、各 M_n から N_n へのブリック複体の構造を保存するリプシッツ写像を定義する。さらに各ブリックに Brock-Canary-Minsky の双ブリック・モデル定理を適用することによって、 M_n から N_n への双リプシッツ写像が定義される。さてここで、 N, N' を $S \times R$ 型の双曲多様体の列の幾何的極限とする。 N から N' へのエンド不変量を保つ同相写像 h が存在するとき、上記の双リプシッツ・モデル定理より h は双リプシッツ写像 h_0 に固有ホモトピックになる。 N, N' の基本群は一般には無限生成なので Sullivan の剛性定理は適用できないが、 N, N' の構造より、この剛性定理を一般化した McMullen の剛性定理が適用できることが分かった。これを使うと双リプシッツ写像 h_0 は等長写像に固有ホモトピックであることも分かる。この結果は、論文：

K. Ohshika and T. Soma, Geometry and topology of geometric limit I

としてまとめ現在専門誌に投稿中である。

現在は、上の議論を精密化することによって、 S 型とは限らない一般の有限生成基本群を持つ双曲 3 次元多様体の列の幾何的極限として現れる双曲 3 次元多様体の分類を進めているところである。特に双曲多様体 N が圧縮可能エンドを持つときの分類が重要である。実際、これが完成すれば、まだ明らかになっていないことが多い、 N と同じホモトピーが他を持つ双曲多様体を作る代数的変形空間の大域的研究に非常に役に立つと考えられる。

(4) Darryl McCullough (オクラホマ大学教授) との共同研究で、双曲 2 次元軌道体を底空間としてもつザイフェルト多様体 M の微分同相群のホモトピー型が S^1 のホモトピー型と一致することを、双曲幾何的手法と最小曲面論を使って証明した。その証明においては、 M の被覆空間で 2 次元双曲平面 H^2 に同変擬等長同値なもの存在するという事実が重要であった。さらにこの結果の応用として、R. Kirby の問題集(1978)にある未解決問題の一つを肯定的に解くことができた。この結果は、

論文：

D. McCullough and T. Soma, The Smale Conjecture for Seifert fibered spaces
としてまとめている途中であり，完成次第適
当な専門誌に投稿する予定である．

(5) 本研究との関連し，3次元多様体のカオ
ス力学系に関する結果も得られた．これは，
桐木紳氏（京都教育大学教授）および西澤由
輔氏（首都大学東京・学振 DC2）との共同研
究である．3次元多様体間の C^2 微分同相写像
の 2-パラメータ族 $\{\phi_{\mu, \nu}\}$ が適当なジェネ
リック条件をみたし，さらに $\phi_{0,0}$ がテロ次
元接触と擬横断的交叉を含むサイクルをも
つとき，0 に任意に近い無限個の $\phi_{\mu, \nu} \in C$ が
ジェネリックなホモクリニック接触をもつ
ことを証明できた．さらにこの 2-パラメータ
族が C^∞ 級であり，さらに適当な条件をみたす
とき， $(0,0)$ に任意に近い正のルベーグ測度
をもつ μ, ν 空間の部分集合 A が存在して， A
に含まれる (μ, ν) に対する $\phi_{\mu, \nu}$ が非双曲
型ストレンジ・アトラクターをもつことが証
明できた．この結果は，すでに論文：

S. Kiriki, Y. Nishizawa and T. Soma,
Heterodimensional tangencies on cycles
leading to strange attractors, Discrete
Conti. Dynam. Sys. 27 (2010) 285-300
として発表されている．

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に
は下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① 相馬輝彦, 位相的クライン群論の最近の
話題, 数学(論説), 査読有, Vol. 62, 2010,
pp. 18-39
- ② S. Kiriki, Y. Nishizawa and T. Soma,
Heterodimensional tangencies
on cycles leading to strange attractors,
Discrete Conti. Dynam. Sys., 査読有,
Vol. 27, 2010, pp. 285-300
- ③ S. Kiriki and T. Soma, Persistent anti-
monotonic bifurcations and strange
attractors for cubic homoclinic
tangencies, Nonlinearity, 査読有, Vol.
21, 2008, pp. 1105-1140
- ④ T. Soma, Existence of ruled wrappings
in hyperbolic 3-manifolds, Geom. Topol.
査読有, Vol. 10, 2006, pp. 1173-1184

[学会発表] (計 7 件)

- ① T. Soma, Existence of generic cubic
homoclinic tangencies for Hénon maps,
NCTS Dynamics Day-focusing on non-
hyperbolic systems, 11月6日, 2009年,
Nat'l Chiao Tung Univ., TAIWAN

- ② 相馬輝彦, 幾何的極限とエンディング・
ラミネーション予想, 日本数学会年会・
トポロジー分科会特別講演, 3月26日,
2009年, 東京大学
- ③ 相馬輝彦, Geometric limits and Ending
Lamination Conjecture, 「リーマン
面・不連続群論」研究集会, 1月12日,
2009年, 大阪大学
- ④ T. Soma, metry and topology of
geometric limits, Topics in Teichmüller
Theory and Kleinian Groups, 11月13
日, 2007年, MSRI, Berkeley, USA
- ⑤ T. Soma, Ahlfors' measure problem for
geometric limit Kleinian groups, Lars
Ahlfors Centennial Celebration, 8月
24日, 2007年, Univ. of Helsinki,
FINLAND
- ⑥ T. Soma, Geometric limits of quasi-
Fuchsian groups, Hyperbolic
Structures on 3-Manifolds and Large
Scale Geometry of Teichmüller Space,
6月16日, Univ. of Warwick,
ENGLAND
- ⑦ 相馬輝彦, Cubic dynamics on the
Hénon family, 2006年度冬の力学系研
究集会, 1月7日, 2007年, 東京大学

[その他]

ホームページ等：

<http://www.comp.metro-u.ac.jp/~tsoma/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

相馬 輝彦 (SOMA TERUHIKO)

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：50154688

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし