

平成 21 年 4 月 21 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540098

研究課題名 (和文) 共形幾何の位相的および解析的研究

研究課題名 (英文) Study of Conformal Geometry from the Viewpoint of  
Topology and Analysis

研究代表者

芥川 一雄 (AKUTAGAWA KAZUO)

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号：80192920

研究成果の概要：コンパクト多様体と言う空間に対して，そこに実現される形(リーマン計量)の在り様全体のなかで最も自然な形を求めることを目標とし，そのため導入された指標が**山辺不変量**と呼ばれる(共形幾何を経由して)定義された微分位相不変量である．この不変量を求めること，およびその振舞いを調べるのが目標である．本研究では，正の3次元多様体の山辺不変量の計算及びその振舞いに関して成果を得た．また正の山辺不変量を持つ直積多様体に関して，その下からの評価を与えた．さらに，この下からの評価と山辺不変量の手術理論の間に成立すると予想される，山辺不変量に関する不等式の提出とこの予想の部分的結果を得た．

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	660,000	4,060,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何，微分トポロジー，多様体上の解析

## 1. 研究開始当初の背景

**共形幾何**は，シンプレクテック幾何と同様に微分トポロジーとリーマン幾何の中間的な位置にあり，多様体のトポロジーを色濃く反映する興味深い研究対象である．また幾何に自然に現れる様々な非線形方程式と深く関係しており，今後の更なる発展が望まれる分野である．**山辺定数**など様々な共形不変量を経由して興味深い微分位相不変量はいくつか定義されているが，なかでも基本的なの

は，**山辺不変量**と呼ばれる不変量である．4次元と3次元多様体の山辺不変量に関して，いくつかのブレイク・スルーが起こったが，それらの次元に限っても，そこで用いられている手法は，表面上互いに全く異なっており，それらの一般的取り扱いや普遍的理解は，未解決の状態であった．この山辺不変量を理解するには，多角的なアプローチが必要である．

## 2. 研究の目的

(1) 正の山辺不変量の研究, 特に「多様体の手術に関する山辺不変量の手術理論」の研究.

(2) 逆平均曲率流の手法による正の3次元多様体の山辺不変量の研究.

(3) リッチ流による3次元負曲率多様体の山辺不変量の研究.

(4) 正の多様体の無限被覆空間の山辺定数と特異集合を持つ空間 Positive Mass 予想の研究.

## 3. 研究の方法

(1) 研究代表者の芥川は各連携研究者と, 本研究研究課題におよび各専門分野との関連するテーマについて定期的に研究連絡を行う.

(2) 国内外の微分幾何・トポロジー・幾何解析等の研究集会に出席し, 本研究に関連する分野の研究者と活発な討論を行う.

(3) メールおよび海外出張・国内招聘により, 海外共同研究者と間接および直接的な研究連絡を行う.

## 4. 研究成果

(1) 上記研究の目的(2)に関して, 山辺不変量が3次元実射影空間のそれより多きい, 3次元閉多様体の完全な分類を与えた. 証明も, Green 関数の族を用いたカット・オフ関数の新しい構成法など斬新なもので, この結果は, 国際的にも高い評価を得た.

(2) 上記研究の目的(3)に関して, リッチ流の研究で重要であった Perelman 不変量と山辺不変量の間で成立する関係を明らかにした. この結果は, 今後の非正の山辺不変量の研究に, リッチ流が有用であることを示している.

(3) 上記研究の目的(4)に関して, 広いクラスの無限被覆空間に関して, Aubin の補題と呼ばれる重要な結果を示した. またこの研究の過程で, ある種のワイルドな特異集合を持つ漸近的に平坦な多様体に関する Positive Mass 定理も示した.

(4) 上記研究の目的(1)に関して, 正の直積多様体の山辺不変量の下からの評価を与えた. この評価を使って, 正の山辺不変量の手術理論におけるある予想を与え, かつ部分的結果も与えた.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

- ① Kazuo Akutagawa, Andre Neves, 3-manifolds with Yamabe invariant greater than that of  $\mathbb{R}P^3$ , J. Differential Geom., 75 巻, 359–386, 2007, 査読有.
- ② Kazuo Akutagawa, Masashi Ishida, Claude LeBrun, Perelman's invariant, Ricci flow, and the Yamabe invariants of smooth manifolds, Archiv der Math., 88 巻, 71–76, 2007, 査読有.
- ③ Kazuo Akutagawa, Luis A. Florit, Jimmy Petean, On Yamabe constants of Riemannian products, Comm. Anal. Geom., 15 巻, 947–969, 2007, 査読有.
- ④ Kazuo Akutagawa, Perelman's invariant and the Yamabe invariant, Proc. TUS-NPC Bilateral Seminar, 1 巻, 120–121, 2008, 査読無.
- ⑤ 芥川和雄, 山辺不変量: 手術理論と直積多様体に関する話題から(基調講演), 第55回幾何学シンポジウム講演要旨, 1 巻, 1–13, 2008, 査読無.
- ⑥ Kobayashi Osamu, A variational problem for affine connections, Archiv der Math., 86 巻, 464–469, 2006, 査読有.
- ⑦ Kobayashi Osamu, Projective structures of a curve in a conformal space, From geometry to quantum mechanics, Prog. Math., 252 巻, 47–51, 2007, 査読有.
- ⑧ Kobayashi Osamu, Ricci curvature of Affine connections, Tohoku J. Math., 60 巻, 357–364, 2008, 査読有.
- ⑨ Maria R. Westdickenberg, Yoshihiro Tonegawa, Higher multiplicities in the one-dimensional Allen-Cahn action functional, Indiana Univ. Math. J., 56 巻, 2935–2989, 2007, 査読有.
- ⑩ Yoshihiro Tonegawa, Applications of geometric measure theory to two-phase separation problems, Sugaku Expos., 21 巻, 97–115, 2008, 査読有.
- ⑪ 井関裕靖, 近藤剛史, 納谷信, A fixed-point theorem for discrete-group actions on Hadamard spaces, 数理解析研究所講究録, 1492 巻, 56–64, 2006, 査読無.
- ⑫ Chikako Mese, Sumio Yamada, The Parametrized Steiner problem and the Singular Plateau via energy, Trans. Amer. Math. Soc., 358 巻, 2875–2895, 2006, 査読有.

〔学会発表〕(計 17 件)

- ① 芥川和雄, 山辺の問題, Positive Mass Theorem および山辺不変量, 特異点研究会「特異点と時空, および関連する物理」, 2007 年 1 月 6 日-1 月 7 日, 学習院大学.
- ② Kazuo Akutagawa, The Yamabe constants of infinite coverings and a positive mass theorem, 国際研究集会「Geometry of Singularities」, 2007 年 1 月 12 日, 東北大学.
- ③ 芥川和雄, Perelman 不変量, Ricci flow および山辺不変量, 微分幾何研究集会「リーマン幾何と幾何解析」, 2007 年 3 月 7 日, 筑波大学.
- ④ 芥川和雄, 山辺不変量—共形幾何の広がり—(企画特別講演), 2007 年度日本数学会年会, 2007 年 3 月 29 日, 埼玉大学.
- ⑤ Kazuo Akutagawa, Yamabe constants of infinite coverings and a positive mass theorem, 国際研究集会「International Conference in Geometry and Analysis, Nanjin 2007」, 2007 年 8 月 9 日, Nanjin University.
- ⑥ Kazuo Akutagawa, Yamabe constants of infinite coverings and a positive mass theorem, 国際研究集会「Variational Problems in Geometry」, 2007 年 9 月 20 日, 仙台国際センター.
- ⑦ Kazuo Akutagawa, On the Yamabe invariant of  $M \times S^1$ , 国際研究集会「The 3rd Geometry Conference for Friendship of Japan and China」, 2008 年 1 月 26 日, 名古屋大学.
- ⑧ Kazuo Akutagawa, Yamabe constants of infinite coverings and a positive mass theorem, 国際研究集会「International Meeting on Spectral Geometry and Related Topics, Potsdam 2008」, 2008 年 5 月 14 日, Potsdam University.
- ⑨ Kazuo Akutagawa, On the Yamabe invariant of  $M \times S^1$ , 国際研究集会「Mini-Workshop in Regensburg, Scalar Curvature and semilinear PDEs in Geometry and topology」, 2008 年 5 月 20 日, University of Regensburg.
- ⑩ 芥川和雄, 山辺不変量: 手術理論と直積多様体に関する話題から(基調講演), 第 55 回幾何学シンポジウム, 2008 年 8 月 25 日, 弘前大学.
- ⑪ Kazuo Akutagawa, The uncertainty principle lemma under gravity and the discrete spectrum of Schrodinger operators, 国際研究集会「The 9-th Pacific Rim Geometry Conference」, 2008 年 12 月 11 日, National Taiwan University.
- ⑫ Kazuo Akutagawa, The uncertainty principle lemma under gravity and the discrete spectrum of Schrodinger operators, 国際研究集会「ソボレフ不等式とその周辺」, 2009 年 3 月 24 日, 東北大学.
- ⑬ Kobayashi Osamu, Ricci curvature affine connections, 国際研究集会「Variational Problems in Geometry」, 2007 年 9 月 18 日, 仙台国際センター.
- ⑭ Yoshihiro Tonegawa, On some regularity issues of stable critical points for phase boundary problems, 「熊本における偏微分方程式研究集会」, 2008 年 10 月 25 日, 熊本大学.
- ⑮ Izeki Hiroyasu, A fixed-point property of discrete groups and energy of equivariant maps, 1st MSJ-SI「Probabilistic Approach to Geometry」, 2008 年 8 月 5 日, 京都大学.
- ⑯ Sumio Yamada, Weil-Petersson geometry of Teichmüller-Coxeter complex, 国際研究集会「Perspectives in Geometric Analysis」, 2008 年 10 月 30 日, Peking University.
- ⑰ 久村裕憲, On the discrete spectrum of Schrodinger operator on noncompact Riemannian manifolds(幾何学分会・一般講演), 2009 年度日本数学会年会, 2009 年 3 月 28 日, 東京大学.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況(計 0 件)

○取得状況(計 0 件)

〔その他〕

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

芥川 一雄 (AKUTAGAWA KAZUO)  
東京理科大学・理工学部・教授  
研究者番号: 80192920

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者

小林 治 (KOBAYASHI OSAMU)  
熊本大学・理学部・教授  
研究者番号: 10153595  
利根川 吉廣 (TONEGAWA YOSHIHIRO)  
北海道大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 80296748  
久村 裕憲 (KUMURA HIRONORI)  
静岡大学・理学部・准教授  
研究者番号: 30283336

井関 裕靖 (IZEKI HIROYASU)  
東北大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：90244409  
山田 澄生 (YAMADA SUMIO)  
東北大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：90396416