様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年６月２８日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006～2009
課題番号：１８５４０１００
研究課題名（和文）　同じ絡み目の２つの射影図をつなぐライデマイスター変形の回数

研究課題名（英文）　The number of Reidemeister moves needed for connecting two link diagrams representing the same link.

研究代表者
林　忠一郎（HAYASHI CHUICHIRO）
日本女子大学・理学部・准教授
研究者番号：２０２８１３２１

研究成果の概要（和文）：同じ結び目を表す２つの異なる射影図はライデマイスター変形（Ｒ変形）と呼ばれる射影図の基本変形を有限回適用して移り合うことが知られている。（ｎ＋１，ｎ）－トーラス結び目の通常の射影図Ｄと（ｎ，ｎ＋１）－トーラス結び目の通常の射影図Ｅは同一の結び目を表す。ＤをＥに変形する際のＲ変形の最小数を決定した。日常用語で言えば、紐を動かしてＤをＥに重ね合わせる際の、最も簡単な動かし方を決定した。

研究成果の概要（英文）：It is well-known that any two knot diagrams which represent the same knot are connected by a finite sequence of Reidemeister moves. We show that the minimal sequence of Reidemister moves connecting the usual diagram of the (n+1, n)-torus knot and that of the (n,n+1)-torus knot contains precisely {(n-1)n(2n-1)/6}+1 Reidemeister moves.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,000,000	0	1,000,000
2007 年度	800,000	240,000	1,040,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,400,000	720,000	4,120,000

研究分野：数学
科研費の分科・細目：幾何学
キーワード：トポロジー、幾何学

１．研究開始当初の背景

(1) 与えられた結び目が自明か否か、与えられた絡み目が分離するか否かを判定することは重要な問題である。その問題は１９６０年代に Haken が解決したのであるが、計算量が多すぎてコンピュータでも実行できないので、実用的でない。また、Haken のアルゴリズムを実行するには専門家でないと理解できない難しい概念を身に付ける必要がある。

(2) １９２０年代に Alexander と Briggs、それと独立に Reidemeister が結び目理論の基本となる定理を示した。２つの射影図が同じ結び目を表すとき、片方に３種類の基本変形を有限回うまく組み合わせて適用することによって他方に変形することができるという定理である。現在、その基本変形はライデマイスター変形と呼ばれている。

(3) Hass と Lagarias はｎ個の交差点を持つ自明結び目の射影図は高々 f(n)=「２の『(１０の１１乗) ×ｎ』乗」回のライデマイスター変形を上手く適用すると交差点無しにできることを２００１年の論文で証明した。この定理を用いて与えられた結び目が自明か否かライデマイスター変形を用いて判定することができる。ありとあらゆる組み合わせで f(n) 回のライデマイスター変形を適用して、交差点無しの knot diagram が現れたら自明結び目、現れなかったら非自明結び目である。実際には計算量が多すぎて実行できないが、その方法は数学者でなくても理解できる。

(4) 研究代表者はｎ個の交差点を持つ分離絡み目の射影図が何回のライデマイスター変形ではずれるか、その上界となるｎの具体的な式を与えた。これによって、原理的には、絡み目が分離されるか否か判定するためのアルゴリズムがライデマイスター変形を用いて与えられることになる。Hass と Lagarias の研究は Haken のノーマル曲面の理論を用いており、研究代表者の研究もそれを踏襲した。しかし、Haken の理論をそのまま用いるのでは、変形回数の評価式はあまり改良されないであろうと思われる。

２．研究の目的

(1) 自明結び目に限らず、どんな型の結び目に対しても、同じ結び目を表す２つの射影図が最少何回のライデマイスター変形で移り合うことができるか、その回数の上界を２つの射影図の交差点の数ｎとｍの具体的な式で与えることが目的である。

(2) 上記の上界の式が得られたら、それは与えられた２つの knot diagram が同じ結び目を与えるか否か判定する有限アルゴリズムを与えることになる。

３．研究の方法

(1) 球面上のどんな結び目の射影図も、交差点の下を通らない上道と上を通らない下道の紐が交互に繋がったものと見なすことができる。結び目の上道と下道への区切り方は一通りではないが、例えば、射影図を上交差点と下交差点の間の点で区切ればよい。ｂ本の上道とｂ本の下道に分かれたとする。上道を球面の上方の球体の中に押し込む。ただし、端点は動かさず、球面上にとめておく。下道は球面の下方の球体に同様に押し込む。このようにして、結び目の橋分解を得る。球面の両側はそれぞれ球体であり、その球体の中にｂ本ずつの結び目の部分弧が入っている。上道を動かした軌跡の円盤を球体の中にとると、円盤の境界の円の半円弧は動かした後の上道であり、もう半分は球面上の弧である。ｂ本の上道に対してｂ個の円盤を互いに交わらないようにとることができる。下道たちに対しても同様に円盤たちをとる。円盤たちと球面の交わりが結び目の射影図になっている。

(2) ２つの射影図D_1とD_2が橋分解を共有する場合をまず考える。n_1とn_2をD_1とD_2の交差点の数とする。D_1とD_2を重ね合わせて得られる球面上のグラフGを考える。Gの頂点はD_1やD_2の交差点たちと、D_1とD_2の交点たちと、橋分解の道の端点たちであり、全て４価である。D_1とD_2の配置を工夫して、なるべくGの頂点が少なくなるようにしておく。グラフGの頂点がn_1とn_2の或る式$f(n_1, n_2)$の値よりも多いと、グラフGは４角形領域たちの連なりの渦巻きを持つ。これはD_1とD_2が無駄に交わっていることを示唆する。D_1とD_2の配置を工夫するとGの頂点の数は$f(n_1, n_2)$以下になる。

(3) Gの頂点数が上から評価できれば、橋分解の球体の中の円盤たちを１つずつ取り替える操作によって、D_1の円盤たちをD_2の円盤たちに変形することができる。この操作はD_1を jump moveでD_2に変形していることになり、それをライデマイスター変形で実現する際の変形回数の評価は研究代表者が２００５年の論文の中で与えている。

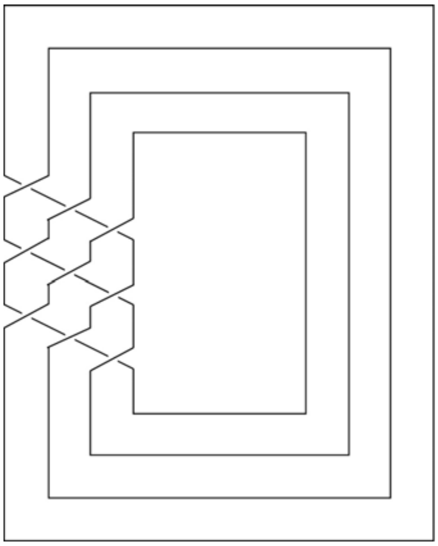
(4) ２つの射影図が橋分解を共有しない場合は、両方の橋分解に共通する stabilization を構成する。必要な stabilization 操作の回数を上から評価する。これは Rubinstein & Scharlemann の Heegaard splitting の stabilization の回数の研究の真似をする。

４．研究成果

(1) (n+1, n)-トーラス結び目の通常の射影図を(n, n+1)-トーラス結び目の通常の射影図にライデマイスター変形によって変形する際の最小の変形回数は$\{(n-1)n(2n-1)/6\}+1$であることを証明した。一般に、２つの射影図が同じ結び目を表すときに、それらを繋ぐライデマイスター変形の列は一通りではなく、むしろ無限に存在する。その中で最も変形回数の少ないものを発見し、さらに、それが本当に最小であることを証明するのは容易なことではない。今回、それを(n+1, n)-トーラス結び目に対して実現した。

(2) pとq はともに 2 以上の自然数で、互いに素であるとする。(p, q)-トーラス結び目は結び目の中で最も重要なクラスの結び目であり、様々な性質が詳細に調べられている。

(p, q)-トーラス結び目の通常の図とは何であるか説明する。まず、p本紐の組み紐群の生成元をσ_1, σ_2, ・・, σ_{p-1} とする。(σ_i はｉ本目の紐がｉ＋１本目の紐の前を通って交差する組み紐である。) このとき、組み紐 ($\sigma_1^{-1}\ \sigma_2^{-1}$ ・・$\sigma_{p-1}^{-1})^q$ を閉組み紐にしたものが(p, q)-トーラス結び目の通常の図である。以下、この図を記号D(p,q) によって表すことにする。この図は符号が＋の交差点しか持っていないことを特に注意したい。下図はD(4,3)である。



(3)　まず、実際にD(n+1, n)をD(n, n+1)に変形するライデマイスター変形の列を構成した。それは(n-1)n(2n-1)/6 回の第３ライデマイスター変形と、１回の第１ライデマイスター変形を用いるものである。この変形は閉組み紐の変形として用いられるマルコフ変形になっている。また、変形途中で符号が－の交差点を導入していないことも注目に値する。

(4)　次に、D(n+1, n)をD(n, n+1)に変形するために必要なライデマイスター変形の回数を下から評価した。この評価のために用いたのは研究代表者が２００６年の論文（下記の雑誌論文③）において導入したcowritheというknot diagram invariantである。これはknot diagramに対して整数値を与える写像である。これは第１ライデマイスター変形では変化しない。第２ライデマイスター変形に関しては、knot diagramに向きを付けて場合分けする。向きの揃った２角形を消す変形のときに１だけ増加し、向きの揃っていない２角形を消すときには変化しない。また、第３ライデマイスター変形によってcowritheは１増えるかまたは１減ることが分かっている。したがって、２つの射影図が同じ結び目を表すとき、片方の図に対してライデマイスター変形を適用して他方に変形する際に、第２ライデマイスター変形と第３ライデマイスター変形の回数の合計は、少なくとも２つの射影図のcowritheの差の絶対値以上になっていることが分かる。D(n+1, n)のcowrithe の値が$(n-1)n^2(n+4)/6$ であり、D(n, n+1)の cowritheの値が$(n-1)n(n+1)^2/6$ であるから、それらの差の$(n-1)n(2n-1)/6$ が必要な第２ライデマイスター変形と第３ライデマイスター変形の回数の合計である。なお、第１ライデマイスター変形が１回以上必要であることは、writheを用いて証明される。writheは交差点の符号の総和であり、第１ライデマイスター変形によって１だけ変化し、第２、第３ライデマイスター変形によっては変化しないことがよく知られている。以上の議論によって、(3)で述べたライデマイスター変形の列が最小回数を実現していることが示された。

(5)　２００８年の Hass と Nowik の論文によって、cowrithe は「Conway 多項式の２次の項の－4 倍」と「ある種のアーノルド不変量たち」の線形和であることが示された。これにより、crowrithe によるライデマイスター変形の最小回数の下からの評価は、アーノルド不変量たちの線形和による評価と一致することが指摘された。アーノルド不変量たち自身は第１ライデマイスター変形で変化するが、うまく重みを付けて線形和を取ると変化しなくなる。

(6)　Hass と Nowik が２００７年のプレプリントで発表した knot diagram invariant は或る自明結び目の射影図をほどくのに交差点数の２次式回のライデマイスター変形が必要であることを示し、かなり強力であるが、positive crossing しか持たない knot diagramに対してはcowritheと値が一致してしまう。

(7)　(5,2)-トーラス結び目に対しては cowrithe によるライデマイスター変形の回数の評価が正確でなかった。何か新しい工夫が必要であることがわかった。

(8)　上記の(n+1, n)-トーラス結び目の研究は、positive knot のライデマイスター変形に関して一つの興味深い問題を与えていると思う。D(n+1, n) と D(n, n+1) の knot diagrams の両方共が符号が positive の crossing しか持たず、上記の変形は符号が negative な crossing を作らなかった。このようなことは一般の positive crossings しか持たない２つの knot diagrams に対して成り立つわけではないと思われるが、しかし、何らかの条件の下では成り立つと思われる。

例えばclosed positive braidの場合はどうだろうか。また、その場合、マルコフ変形に対応するライデマイスター変形だけで済むかという問題も考えられる。

(9)　(n+1, n)-トーラス結び目に関する上記の研究に関しては、すでに英語の論文をまとめ、専門雑誌に投稿中である。

(10)　目的としていたライデマイスター変形の最小回数の一般的な上界は得られなかった。計画に記した四角形の渦巻の存在を示すことが難しく、実現できなかった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Hiroshi Goda, Chuichiro Hayashi, Hyun-Jong Song, Dehn surgeries on 2-bridge links which yield reducible 3-manifold, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 査読有, Vol.18, 2009, 917-956

② Miwa Iwakura, Chuichiro Hayashi, Non-orientable fundamental surfaces in lens spaces, Topology and its Applications, 査読有, Vol.156, 2009, 1753-1766

③Chuichiro Hayashi, A lower bound for the number of Reidemeister moves for unknotting, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 査読有, Vol.15, 2006, 313-325

〔学会発表〕（計１件）

① Chuichiro Hayashi, Miwa Iwakura, Q-fundamental surfaces in lens spaces, Knotting Mathematics and Art: conference in Low Dimensional Topology and Mathematical Art, University of South Florida, Tampa Nov.1-3, 2007

〔その他〕
ホームページ等
http://mcm-www.jwu.ac.jp/~hayashic/index.html

６．研究組織
(1)研究代表者
　林　忠一郎（HAYASHI CHUICHIRO）
　日本女子大学・理学部・准教授
　研究者番号：20281321

(2)研究分担者
　　　　　　（　　）

　研究者番号：

(3)連携研究者
　　　　　　（　　）

　研究者番号：