様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 4 月 30 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006～2008
課題番号：１８５４０１０２
研究課題名（和文）　大域的特異点論による多様体の構造の研究

研究課題名（英文）　Study on the structure of manifolds by global singularity theory

研究代表者
佐久間　一浩（SAKUMA KAZUHIRO）
近畿大学・理工学部・教授
研究者番号：８０２７０３６２

研究成果の概要：向き付け不可能な４次元微分可能閉多様体から安定平行化可能な４次元多様体へのジェネリック写像のカスプ特異点を消去するための一次障害類はトム多項式であり、二次障害類は、４次のシュティーフェル・ホイットニー類であることを発見した。定義域が向き付け可能な場合は、カスプ特異点と臍点のトム多項式（２次シュティーフェル・ホイットニー類と１次ポントリャーギン類）が唯一の障害類である。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	900,000	0	900,000
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	2,200,000	390,000	2,590,000

研究分野：数学
科研費の分科・細目：幾何学・微分トポロジー
キーワード：可微分写像、特異点、多様体、特性類、トム多項式

１．研究開始当初の背景

可微分写像の特異点論は、Whitney, Thom による１９５０年代の研究に始まる。彼らは、「モース理論」の拡張として、モース関数の場合が値域の次元が１次元であるのに対して、値域が２次元、つまり２次元ユークリッド空間の可微分写像に現れる特異点を考察し、折り目特異点とカスプ特異点がジェネリックに現れることを突き止めた。Thom は、さらに、写像が適当なジェット横断性の条件を満たすときに、特異点のトム多項式の概念を定義し、実際にそれが特性類の多項式で書けることを示した。トム多項式は、特異点を消去するための障害類を与えるが、１９８０年代になって、安藤良文（山口大）がジェット切断を拡張するための第一次障害類がトム多項式であるという解釈を与えた。その観点からは当然二次障害類があってしかるべきであるが、それにはジェット・バンドルのファイバーのホモトピー型の決定というホモトピー論として難問があるため、二次以上の障害類については何も論ぜられることはなかった。一方で、１９７０年頃、ロシアのエリアシュベルグが折り目写像（特異点としては折り目特異点のみをもつ可微分写像）の存在問題をホモトピー原理により解決した。この解は、ホモトピー群の任意の元が折り目写像をいつでも含むかという、マザーの問題の

対する完全な解答を含んでいた。さらに、２１世紀に入って、安藤によりエリアシュベルグのホモトピー原理が２次のジェットのレベルでのホモトピー原理に精密化された。また、私が提出した問題「向き付け可能な４次元閉多様体から３次元ユークリッド空間への折り目写像の存在のための必要十分条件を与えよ」に対して、２００３年、２００４年に佐伯修、Sadykov により独立に異なる手法で解決された。この解は同時に（４，３）次元対ではカスプ特異点を消去するための二次障害類が存在することも明らかにした。

２．研究の目的
多様体の間の可微分写像の特異点の大域的研究は、関数の場合の「モース理論」の拡張に該当する研究で、関数の場合に比べて写像の特異点の研究は難しいが、成果が得られればそれは意義深い。そこで、特異点を消去するための障害類を決定するのが目的である。微分可能写像の特異点論を通して、多様体の構造を調べる。特に、定義域多様体の次元が大きいかまたは等しいときの良い写像の存在または障害の研究を行う。この場合、写像が沈め込みでない限り、一般に避けがたい特異点が生じる。写像が沈め込みならば、大抵はファイバー束と見なせるがそのときでさえ、ファイバー束の構造群が大きな群のときには、ファイバー束の分類は難しい問題である。我々の目的は、沈め込みとはならない場合、すなわち写像に特異点が生じる場合に、特異ファイバー構造をもつ多様体の構造を微分位相幾何学の観点から分類しようとすることにある。特異点の近傍では、陰関数定理が成り立たないため、特異点の考察は局所的にも極めて難しい。そこで、現れる特異点型を折り目に限定して、特異ファイバー束の構造を調べることが我々の主要問題である。これは、１９５０年代６０年代に盛んであった「多様体の埋め込み・はめ込み問題」と方法論的には共通した問題意識に基づいている。値域の次元が平面の場合には、Thom-Levine-Eliashberg の定理により完全に解決している。さらに値域の次元が３次元の場合は、Sadykov により定義域多様体が向き付け可能かつ次元が偶数で８次元以上ならば存在する。本研究課題では未解決の次元対（６，３）や値域が４次元の場合の折り目写像の存在問題に取り組む。

３．研究の方法
内在的微分を用いて定義されるであろう二次トム多項式の概念の定式化
と向き付け不可能なカテゴリにおける４次元多様体論との関連を調べることがその方法論となる。ジェット・バンドルと内在的微分を使って定義されるある部分バンドルのファイバーのホモトピー型の計算が重要である。部分バンドル上のジェット拡大の一次障害類はトム多項式である。そこで、トム多項式が消えている場合に、二次障害類を計算スルのことが目標となる。このような結果が存在する例は、（４，３）または（４，６）次元対でしか見つかっていない。どちらも定義域多様体が向き付け可能な場合に限定されている。（４，６）次元対の場合は、Smale-Hirsch によるはめこみ写像のホモトピー原理による。Szucs は２００４年に出版された論文の中で、こうした障害類がポストニコフ不変量として解釈できることを示した。一方で、（４，４）次元対では無機づけられた４次元閉多様体の整係数二次コホモロジー群上で定義される交点形式の代数構造がその障害を与えていることが分かる。このときに、４次元多様体の向きの入れ方は本質的で、例えば、複素射影平面とその向きを逆にしたものとの連結和の上では、特異点消去のための障害類は全く消えているが、複素射影平面の二つの連結和の上ではカスプ特異点消去のための障害が存在する。したがって、多様体の向き付けあるいは向き付け不可能であることは問題を考察する上でのデリケートな条件付けとなっている。

４．研究成果
滑らかな多様体の間の無限階微分可能写像の特異点集合と定義域多様体の位相構造や微分構造の間には密接な関連がある。本研究では、６０年代、７０年代に確立されたトム、レビン、エリアシュベルグのカスプ特異点解消定理の拡張版を考察した。彼らの結果は値域が２次元ユークリッド空間の場合の考察であるが、本研究では値域が３次元および４次元ユークリッド空間の場合の写像の特異点解消と定義域多様体の特徴付け定理を得るのが目的である。最近の３次元ポアンカレ予想の解決から、４次元ホモトピー球面から３次元ユークリッド空間への定値折り目写像が存在すれば、そのホモトピー球面は４次元球面に微分同相であることが従う。さらに、特異点集合は２次元球面に微分同相であるが、その埋め込みが滑らかに自明であることが分かる。定義域が４次元閉多様体のとき、４次元ユークリッド空間への折り目写像の存在のための必要十分条件は、向き付け可能ならば、安定平行化可能であることであり、向き付け不可能ならば、２次と４次 Stiefel-Whitney 類が消えることであるという特徴付けが得られる。特に、後者の場合は２次の Stiefel-Whitney 類はカスプ特異点の Thom 多項式であるが、

４次のStiefel-Whitney類はThom多項式とは直接関連しない障害類であり、Thom多項式をジェット切断の第一次障害類の見なす立場からは第二次障害類が見いだされた例となる。実際、その証明はPostnikov分解と障害理論に基づき、第二次障害類として上記のコホモロジー類が現れることが計算される。
（４，５）次元対でも二次障害類が存在することが分かった。向き付け可能な４次元閉多様体が５次元ユークリッド空間へはめ込み可能であるための必要十分条件は、４次元多様体が安定平行化可能であることなのが分かる。４次元では、安定平行化可能であることと符号数が消えて、スピンであることは同値である。このことからただちに、例えばK３曲面はスピンだが符号数は１６で、０でないので、はめ込みは存在しない。一方、５次元へのジャネリックな写像は１次元の特異点集合となるホイットニー傘特異点が一般に現れるが、そのトム多項式はいつでも消えていることが計算できる。したがって、K３曲面からのジェネリック写像には符号数が消えない（すなわち、ポントリャーギン類が消えない）ことから、トム多項式は消えているが、特異点は消せない二次障害類がポントリャーギン類であることが従う。
値域の次元が３次元の場合の折り目写像が存在するための必要十分条件を求める問題がほぼ完全に解決した。定義域が４次元の場合は、すでに解決しているので、問題は５次元以上である。５次元以上の奇数次元では、カスプ特異点のトム多項式が唯一の障害類であることが分かった。特に、（４ｍ＋３）次元の場合は、カスプ特異点のトム多項式が消えているので、いつでも折り目写像が存在することになる。５次元では、多様体がスピンならばカスプのトム多項式が消えているので、いつでも折り目写像が存在することが従う。一方、６次元以上の偶数次元の場合が問題は微妙で、向き付け可能な８次元以上ならば、Sadykovにより彼によるChess予想の解決の方法論の拡張で、カスプ特異点のトム多項式が消えていて、折り目写像がいつでも存在することが示された。筆者は、６次元の場合を考察して、（向き付け可能性の仮定なしに）オイラー標数が偶数で、カスプ特異点のトム多項式が消えているならば、折り目写像が存在することが証明できた。しかし、例えば６次元実射影空間から３次元ユークリッド空間への折り目写像が存在するかどうかはわからない。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３　件）

① K. Sakuma, Existence problem for fold maps, JARCS Proceedings, World Scientific Publ., 2007, pp. 342-387.

② T. Ootsuka, K. Sakuma, Braid groups and topological quatum computing, World Scientific Publ., 2008, pp. 55-89.

③ K. Sakuma, A note on a recursive formula on the Arf-Kervaire invariant, Int. J. Open Problems Compt. Math., vol.1, 2008, pp. 66-70.

〔学会発表〕（計　７件）

① K. Sakuma, Existence problem of fold maps, International Singularity Conference at Beijing Chemical Institute of Technology, China, 2006年５月.

② K. Sakuma, Global Singularity Theory, Colloquim Talk in Math. Department of Brigham Young University, U.S.A., 2006年９月.

③ R. Sadykov, O. Saeki, K. Sakuma, Obstruction to eliminating singularities, 日本数学会春季総合年会、トポロジー分科会、埼玉大学、２００７年３月.

④K. Sakuma, Braid groups and topological quantum computing, TQC symposium at Kinki University, 2007年８月.

⑤佐久間一浩、平方剰余法則とアレキサンダー多項式の特殊値、トポロジーセミナー、九州大学、２００８年４月.

⑥K. Sakuma, A question on the special value of Alexander polynomial, KOOKセミナー、大阪市立大学、２００８年５月.

⑦佐久間一浩、A recursive formula of the Arf-Kervaire invariant、日本数学会春季総合年会、トポロジー分科会、東京大学、２００９年３月.

〔図書〕（計 ２　件）

①青木貴史・大野泰夫・尾崎学・佐久間一浩・中村弥生、「微分積分学２８講」、培風館、２００９年.

②青木貴史・大野泰夫・尾崎学・佐久間一浩・中村弥生、「線形代数学２８講」、培風館、２００９年.

６．研究組織
(1)研究代表者
佐久間　一浩（SAKUMA KAZUHIRO）
近畿大学・理工学部・教授
研究者番号：８０２７０３６２

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし