

平成22年5月10日現在

研究種目：基盤研究（C）  
 研究期間：2006～2009  
 課題番号：18540103  
 研究課題名（和文） 現代的観点による古典的微分幾何の再構築とその応用  
 研究課題名（英文） Classical differential geometry from the modern  
 viewpoint and its application  
 研究代表者  
 黒瀬 俊（KUROSE TAKASHI）  
 福岡大学・理学部・教授  
 研究者番号：30215107

研究成果の概要（和文）：古典的微分幾何を可積分系理論・特異点論などの現代的手法を用いて研究することにより、古典的微分幾何の諸分野とその応用に関して、特に曲線の運動を用いた可積分系の幾何的研究、4次元空間形内の共形平坦超曲面の具体的構成と分類、複素空間形内の実超曲面、3次元空間内の曲面論、アフィン微分幾何とそのヘッセ幾何・情報幾何への応用等に関して多くの新たな知見を得、また今後の研究の進展の基礎を築いた。

研究成果の概要（英文）：In this research, we studied classical differential geometry from modern viewpoints, such as of the theory of integral systems and of the theory of singularities; we obtained results on various fields of classical differential geometry and their applications, in particular, the motions of curves associated with integrable systems, explicit construction and the classification of conformally flat hypersurfaces of four-dimensional space forms, real hypersurfaces of complex space forms, surfaces of three-dimensional spaces, affine differential geometry and its applications to Hessian geometry and information geometry, and so on.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	700,000	0	700,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
総計	3,300,000	780,000	4,080,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：古典的微分幾何、可積分系、曲線の運動、ハミルトン系、共形平坦超曲面、実超曲面、ヘッセ幾何、情報幾何

## 1. 研究開始当初の背景

19世紀から20世紀にかけての微分幾何研究の大きなテーマの一つは、合同変換群の作用するユークリッド空間、アフィン変換群の

作用するアフィン空間、共形変換群ないしメビウス変換群の作用する球面など、さまざまな変換群の推移的な作用のもとで空間の部分多様体の不変な性質を研究することである。

った。これらを総称して古典的微分幾何と呼ぶ。

古典的微分幾何の研究は 20 世紀の中ごろいったん停滞して見える時期があったが、1980 年代にはいって古典的微分幾何の諸分野にそれぞれ現代的な定式化が与えられると、その豊かさが改めて認識されるようになり、本研究の開始当初には非常に活発に研究がなされるようになっていた。さらに古典的微分幾何は、たとえば可積分系理論に豊富な例と問題を与える供給源の一つとなって相互に影響を与えあっているほか、情報幾何などのこれまでは予想されなかった応用数学分野を研究するための数学的な道具として取り入れられるようになってきていた。このため、本研究代表者は現代的観点から古典的微分幾何とその応用を総合的に研究することは微分幾何研究の一つの重要課題であるとの認識を持ち、本研究を開始した。

## 2. 研究の目的

1. で述べたことを動機として、本研究課題の申請時における当初の研究目的は以下の通りである。

古典的微分幾何の諸理論について、

(1) これまでに蓄積されている結果を現代的観点で書き直し再検討することにより、新たな展開を図ること

(2) その成果を用いて、可積分系理論に対し具体例と問題を豊富に供給し、また逆に可積分系理論の手法をとり入れた幾何学理論を構築すること

(3) 古典的微分幾何における曲面の種々の変換理論を統一的に扱える理論を、微分幾何・可積分系理論の両面から築くこと

## 3. 研究の方法

本研究課題では、古典的微分幾何のいくつかの分野の重点的研究と、選ばれた個別トピックに関する分野横断的な研究を研究組織の成員で分担し、並行して行った。具体的な研究項目は次のとおりである（カッコ内は各研究項目に主として従事した者）。

(1) 重点的分野の研究

- ① アフィン微分幾何・射影微分幾何とその応用（黒瀬・古畑）
- ② 共形微分幾何、特に空間形内の共形平坦超曲面とその応用（陶山）
- ③ 複素空間形内の実超曲面とその応用（濱田）

(2) 個別トピックの研究

- ① 曲線の変分問題および運動に付随する微分方程式（黒瀬・川久保）
- ② 古典的微分幾何の各分野において特徴的な曲面の表現公式、および特異点を持つ曲面（山田）
- ③ 古典的微分幾何に現れる可積分系とそ

の離散化（松浦・井ノ口）

## 4. 研究成果

(1) 可積分系が付随する曲線の運動

古典的微分幾何における曲線論では、大きな変換群が作用する 2 次元ないし 3 次元のさまざまな空間内の曲線に対し、その幾何的不変量として曲率が定義される。曲線が時間変化（運動）すると曲率も変化するが、特定の運動に対しては曲率の時間変化がバーガス方程式や KdV 方程式など、数物理学で良く知られた可積分系に従うことが知られている。可積分系が付随するこのような曲線の運動を利用して、種々の可積分系を幾何的に研究し、以下の成果を得た。

- ① 複素双曲線内の曲線の運動でバーガス方程式が付随するものを与え、この運動を用いて、バーガス方程式を含む方程式の階層を複素双曲線内の曲線全体の成す空間における無限多重ハミルトン系としての定式化を幾何的に与えた。また、複素双曲線内の曲線全体の空間のリーマン幾何的・シンプレクティック幾何的性質を明らかにした。
- ② KdV 方程式階層・変形 KdV 方程式階層がそれぞれアフィン平面の等積中心アフィン閉曲線の運動・ユークリッド平面の正則曲線の運動に付随することを用い、この 2 階層にそれぞれある無限次元双（前）シンプレクティック空間上の双ハミルトン系としての定式化を幾何的に与えた。さらにこの 2 階層間のミウラ変換が幾何的にはこれらの空間の間の双（前）シンプレクティック写像として与えられることを示した。
- ③ 局所誘導階層と呼ばれる 3 次元ユークリッド空間内の非圧縮性非粘性流体の渦糸の運動から導かれる可積分系を、より一般の空間形内で考え、その全進行波解を構成し、特にその中でソリトクラスと呼ばれるクラスの曲線の具体的な表示式を与えた。なおこのソリトクラスには、曲線の弾性エネルギー汎関数に対する変分問題の臨界点として得られる周期的キルヒホッフ弾性棒が含まれているが、周期的キルヒホッフ弾性棒に対してはエネルギー汎関数がパレ・スメール条件を満たしていることを示して、弾性エネルギーに関して不安定なキルヒホッフ弾性棒の存在とその性質も明らかにした。
- ④ 差分可積分系を幾何的に扱うため、平面曲線の運動を差分幾何の観点から研究し、その結果、差分曲線（折線）の時間的にも離散化された運動で、非一樣格子上の差分 KdV 方程式が付随するものを構成することにより、差分 KdV 方程式の差

分幾何的な解釈を与えることに成功した。また、非一様格子上の差分変形 KdV 方程式に対しても差分幾何的な解釈が与えられることを示し、対応する差分曲線の運動を用いて、この二つの差分方程式の間の解の変換（差分ミウラ変換）を導出した。

連続または差分曲線の運動を通じて得られた以上の成果は、可積分系を研究する上でこの幾何的な手法が非常に有効であることを示している。

#### (2) 4次元空間形内の共形平坦超曲面の具体的構成と分類

- ① 与えられた共形平坦超曲面に対して、互いに共形同値ではない共形平坦超曲面の1径族が存在することを示した。
  - ② ある種の構成関数が存在して、その関数から共形平坦超曲面の構成に必要なデータが得られることを示した。
  - ③ ある特定の性質を満たす共形平坦超曲面の計量を完全に決定し、さらにそれらの超曲面の積分表示を具体的に与えた。
- 以上の成果により、4次元空間形内の共形平坦超曲面の具体構成と完全な分類に向けての大きく進展することができたと言える。

#### (3) 複素空間形内の実超曲面

- ① 複素射影平面・複素双曲平面内の実超曲面で、第二基本形式が擬平行であるもの、および曲率が\*-アインシュタイン条件を満たし正則分布が可積分であるものを決定した。また、2次元複素空間形内の擬対称実超曲面の分類を行った。
  - ② 複素双曲空間内の等質実超曲面のうち、リー実超曲面と呼ばれるものについて、その構造を解明する上で有効と思われる曲率の評価式を与えた。また、これにより全空間が2次元の場合と3次元以上の場合ではリー実超曲面の幾何的性質が大きく異なることが分かった。
  - ③ 複素空間形の一般化である階数1の対称空間において、2個の定主曲率を持ち曲率に関するある条件を満たす実超曲面が、大域的な条件のもとでは測地球に限ることを示した。
- ①、②は複素空間形内の実超曲面の分類問題に対する新たな成果である。また、③はこれまであまり重視されていなかった実超曲面の大域性に関する条件が実超曲面の研究においても有用であることを示唆しており、今後のこの方向の研究の基礎的な結果の一つとなるものであると考えられる。

#### (4) 3次元空間内の曲面の幾何 ユークリッド空間・ミンコフスキー空間・双曲空間などさまざまな3次元空間において、

その中の曲面の幾何を可積分系理論・特異点論などの手法も用いて研究し、以下の成果を得た。

- ① 3次元ユークリッド空間内の完備な極小曲面でその随伴族すべてが有界であるものを構成した。
- ② 曲面の特異点のうち、カスピダル・クロスエッジおよびカスピダル・クロスキャップと呼ばれる特異点の判定条件を与え、それに用いて3次元ミンコフスキー空間内の極大面の一般的な特異点を分類した。また、同じく3次元ミンコフスキー空間において、光的接線曲面と呼ばれる光的曲面のサブクラスを導入し、その基本的な性質を調べた。
- ③ 第4種概コンパクト型と呼ばれる自己同形写像で定まるループ群を用いて、3次元双曲空間において、平均曲率の絶対値が1未満のすべての平均曲率一定曲面を局所的に構成した。さらに、ここで用いた構成法が、部分的にはあるが、特定次元の双曲空間の単位接ベクトル束に値を持つ調和写像の構成に一般化できることを示した。また、同じく3次元双曲空間において、平坦フロントの焦面の特異点の挙動を調べた他、平坦フロントが弱完備であるとき、そのエンドの漸近挙動を解析した。
- ④ 3次元等質空間における曲面論について、ハイゼンベルク群および3次元可解リー群Sol内の極小曲面に対し積分表示を与えた。また、3次元可解リー群のうちで、極小曲面がこのような表示公式を持つものは、Sol、3次元双曲空間、3次元ユークリッド空間の三つに限られることを示した。

#### (5) アフィン微分幾何およびそのヘッセ幾何・情報幾何への応用

- ① アフィン空間の中心アフィン超曲面に対して、中心写像と呼ばれる超曲面からアフィン空間への写像が定まる。この中心写像がもとの超曲面自身と中心アフィン合同になるという性質（自己合同性）がカラビ合成という作用のもとで不変であることを示した。また、3次元アフィン空間において中心写像が曲線を描く曲面の例を具体的に構成することによって、それらが豊富に存在することを示した。
- ② ヘッセ断面曲率が一定のヘッセ多様体について、アフィン微分幾何を応用することにより、曲率が0ないし正定数の場合を完全に構成・分類した。また、曲率が負定数の場合は、多様体の次元が2のとき、その全ての例を具体的に構成した。この結果は、リーマン幾何における空間

形のように、ヘッセ幾何における標準的なモデルとなるヘッセ多様体を少なくとも 2 次元の場合に与えるものであり、今後のヘッセ幾何研究における一つの基盤を与えるものである。

- ③ (古典的)情報幾何において現れる幾何構造の一般化である統計多様体は、アフィン空間の超曲面として実現し、アフィン微分幾何の手法を用いることで、ダイバージェンスなどの情報幾何的な諸概念を幾何的に解釈・研究することができた。この類似として、本研究では量子情報幾何に現れる幾何構造を一般化して、振れを許す統計多様体を定義し、その基本的な性質、特にアフィン空間の分布としての実現可能性と前ダイバージェンスの性質を明らかにした。これは分布のアフィン微分幾何の構築とその量子情報幾何への応用に先鞭をつけるものである。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 22 件)

- ① J. -T. Cho, T. Hamada and J. Inoguchi, Three dimensional real hypersurfaces in complex space forms, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有, to appear.
- ② A. Fujioka and T. Kurose, Hamiltonian formalism for the higher KdV flows on the space of closed complex equicentroaffine curves, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 査読有, 7(2010), 165–175.
- ③ T. Hamada and J. Inoguchi, Ruled real hypersurfaces of complex space forms, Kodai Mathematical Journal, 査読有, 33(2010), 123–134.
- ④ A. Fujioka and T. Kurose, Geometry of the space of closed curves in the complex hyperbola, Kyushu Journal of Mathematics, 査読有, 63(2009), 161–165.
- ⑤ T. Hamada and K. Shiohama, Complete real hypersurfaces in compact rank one symmetric spaces, Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, 137(2009), 3905–3910.
- ⑥ K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, The geometry of fronts, Annals of Mathematics, 査読有, 169(2009), 491–529.
- ⑦ M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, Asymptotic behavior of flat

surface in hyperbolic 3-space, Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有, 61(2009), 799–852.

- ⑧ J. Inoguchi and S. Lee, Lightlike surfaces in Minkowski 3-space, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 査読有, 6(2009), 267–283.
- ⑨ Hitoshi Furuhashi, Hypersurfaces in statistical manifolds, Differential Geometry and its Applications, 査読有, 27(2009), 420–429.
- ⑩ A. Fujioka and T. Kurose, Motions of curves in the complex hyperbola and the Burgers hierarchy, Kyushu Journal of Mathematics, 査読有, 45(2008), 1057–1065.
- ⑪ Satoshi Kawakubo, Kirchoff elastic rods in three-dimensional space forms, Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有, 60(2008), 551–582.
- ⑫ J. Inoguchi and S. Lee, A Weierstrass representation for minimal surfaces in Sol, Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, 136(2008), 2209–2216.
- ⑬ U. Hertrich-Jeromin and Y. Suyama, Conformally flat hypersurfaces with cyclic Guichard net, International Journal of Mathematics, 査読有, 17(2007), 301–329.

[学会発表] (計 25 件)

- ① 濱田龍義, Lie hypersurfaces in the complex hyperbolic space, 微分幾何学ワークショップ「部分多様体の幾何学とリー群論」, 2009年10月30日, 大阪市立大学.
- ② 川久保哲, 3次元空間形内の局所誘導階層の進行波解, 第56回幾何学シンポジウム, 2009年8月31日, 佐賀大学.
- ③ 井ノ口順一, 3次元双曲空間の平均曲率一定曲面, 第56回幾何学シンポジウム, 2009年8月30日, 佐賀大学.
- ④ 濱田龍義, 複素空間型内の実超曲面に関する考察, 第55回幾何学シンポジウム, 2008年8月22日, 弘前大学.
- ⑤ 黒瀬俊, 定曲率ヘッセ多様体の分類, RIMS 研究集会「部分多様体の微分幾何学およびその周辺領域の研究」, 2008年6月23日, 京都大学数理解析研究所.
- ⑥ 濱田龍義, \*-Einstein real hypersurfaces of complex space forms, The 12th International Workshop on Differential Geometry and Related Topics, 2008年5月30日–6月1日, Kyungpook National University

- (Korea).
- ⑦ 川久保哲, Kirchhoff 弾性棒のエネルギー汎関数のコンパクト性, 日本数学会 2008 年度年会, 2008 年 3 月 24 日, 近畿大学.
  - ⑧ 一山稔之・井ノ口順一・浦川肇, Biharmonic maps and bi-Yang Mills fields, 日本数学会秋季総合分科会, 2007 年 9 月 21 日, 東北大学.
  - ⑨ 松浦望, Discrete time evolution of planner discrete curves, DMHF2007: COE Conference on the Development of Dynamic Mathematics with High Functionality, 2006 年 10 月 2 日, 福岡リーセントホテル.
  - ⑩ 井ノ口順一, Affine spheres of finite type, DMHF2007: COE Conference on the Development of Dynamic Mathematics with High Functionality, 2006 年 10 月 2 日, 福岡リーセントホテル.

[図書] (計 2 件)

- ① 井ノ口順一, 朝倉書店, 曲線とソリトン, 2010 年, 177 頁.
- ② 井ノ口順一, 日本評論社, 幾何学いろいろ, 2007 年, 209 頁.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

黒瀬 俊 (KUROSE TAKASHI)  
福岡大学・理学部・教授  
研究者番号: 30215107

### (2) 研究分担者

陶山 芳彦 (SUAYMA YOSHIHIKO)  
福岡大学・理学部・教授  
研究者番号: 70028223  
濱田 龍義 (HAMADA TATSUYOSHI)  
福岡大学・理学部・助教  
研究者番号: 90299537  
川久保 哲 (KAWAKUBO SATOSHI)  
福岡大学・理学部・助教  
研究者番号: 80360303  
松浦 望 (MATSUURA NOZOMU)  
福岡大学・理学部・助教  
研究者番号: 00389339  
山田 光太郎 (YAMADA KOTARO)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 10221657  
(H19→H20: 連携研究者)  
井ノ口 順一 (INOUCHI JUNICHI)  
山形大学・理学部・准教授  
研究者番号: 40309886  
(H19→H20: 連携研究者)  
古畑 仁 (FURUHATA HITOSHI)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授  
研究者番号: 80282036  
(H19→H20: 連携研究者)

(3) 連携研究者  
( )

研究者番号: