様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年３月３１日現在

研究種目： 基盤研究（C）
研究期間： 2006～2008
課題番号： 18540107
研究課題名（和文） 特異性の解を持つ偏微分方程式の数値解法と数値解析に関する研究

研究課題名（英文） Numerical Methods and Numerical Analysis for Partial Differential Equations with Singularities

研究代表者
方 青（Qing FANG）
山形大学・理学部・教授
研究者番号： 10243544

研究成果の概要：
物理学、化学、生物学、地学、工学等の自然科学及び経済学、金融学等の人文科学において、現象の数理モデルを記述するには微分方程式が良く使われている。微分方程式の解析解を解くことがとても難しいので、コンピュータによって数値解を求めることは要求されている。その中で、特異性の解を持つ微分方程式の数値解法に対してまだ知られていないことが多く存在する。本研究では、研究代表者は、研究分担者たちの協力を得て、２次元空間の中の多角形領域における特異性の解をもつポアソン方程式の混合境界値問題について、有限差分解の微分の収束解析を行った。また、１次元区間における２点境界値問題に対しても、有限差分解の誤差評価と関連する課題について、成果を得た。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,300,000	0	1,300,000
2007 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	630,000	4,030,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：微分方程式、境界値問題、特異性、有限差分法、有限要素法、誤差評価、超収束

１．研究開始当初の背景

今の偏微分方程式に対する数値解の誤差解析の数学的理論は膨大な知見が集積されているが、それらの多くは、通常、データ（方程式の係数関数、領域の境界、境界-初期条件、外力項等）の滑らかさに強く依存している。方程式のデータのいずれかが特異性を持ち、その結果、解が滑らかさがそこなわれる場合の数値解の誤差評価は、現在においてもほとんどないのが現状である。

２．研究の目的

(1) １次元上の２点境界値問題に対する誤差解析を行う。

(2) 楕円型方程式の一般的な境界値問題に対して、多項式伸長変換または指数関数伸長変換を施すことにより、領域の境界近辺で解の微分が発散しても、有限差分法による近似解の収束性を示し、その誤差評価を行う。

３．研究の方法

(1) 研究代表者である方青は数値解析の立場から、国内、海外の研究者との交流を図りながら研究を進める。２次元の初期値-境界値問題に対する有限差分近似に対しては、非一様な領域分割上の収束オーダーが最良になるかという課題はまだ解決されていないが、結合的な数値解法の精力的な研究で解決されることが期待できる。

(2) 研究分担者の河村は、関数解析の立場から、Sobolev 関数空間において数値解の連続ノルムと離散ノルムの関係の研究を進め、超収束の誤差評価を行う。

(3) 連携研究者（前期研究分担者）の澤田は、計算機代数学の立場から、大規模線形システムの反復解法の研究と適用を担当することになる。

(4) 連携研究者（前期研究分担者）の西村は、並列計算による数値解法の検証とアルゴリズムの開発を担当することになる。

４．研究成果

(1) 楕円型方程式の境界値問題の差分解の微分の収束性に関する研究

以下のような Dirichlet 境界値条件と Robin 境界値条件をもつ楕円型方程式の混合境界値問題

$$-\Delta u + c(x,y)u = f(x,y), \quad (x,y)\in S$$
$$u = g(x,y), \quad (x,y)\in \Gamma_D$$
$$u_n + \alpha(x,y)u = g_R(x,y), \quad (x,y)\in \Gamma_R$$

の差分解について研究を行った。但し、S は $\mathbb{R}^2$ の中の多角形領域で、その境界 Γ は $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_R$ となり、Γ_D と Γ_R においてそれぞれ Dirichlet 境界値条件と Robin 境界値条件が与えられる。$c(x,y), \alpha(x,y)$ は非負な滑らかな関数で、$f(x,y), g(x,y), g_R(x,y)$ は与えられる関数である。

$H^1(S)$ は普通の Sobolev 空間を表すとする。

$$H_0^1(S) = \{v : v\in H^1(S), v|_{\Gamma_D} = 0\}$$

とおく。問題を変分問題に書き直し、真の解が境界の一部分 $\Gamma_U \subset \Gamma_D$ でその微分が発散する場合を考える。主に以下の特異性の仮定を課す。

(A1) 正の定数 σ と c_1 があって、Γ_U の近傍で

$$\sup_{0<d(x,y)<<1} d^{i-\sigma}(x,y)\left|\frac{\partial^i}{\partial n^i}u(x,y)\right| \le C_1, i = 1,2,3,4.$$

ここで、d は $(x,y)\in S$ と Γ_U の距離を表し、$\sigma = 1/2+\mu$ for some $\mu > 0$.

(A2) $\nu = -3/2+\mu$ に対して、関数 $f(x,y)$ は次の条件をみたす。

$$\sup_{0<d(x,y)<<1} d^{i-\sigma}(x,y)\left|\frac{\partial^i}{\partial n^i}f(x,y)\right| \le C_1, i = 0,1,2.$$

境界 Γ_U 付近の差分格子線が Γ_U に平行か垂直しているとする。講じる対策は Γ_U に平行する格子線を伸長関数によって構成する。

論文 ①, ③ は、 Shortley-Weller 差分近似 u_h の微分の超収束性について、次の結果を示した。

主定理. 条件 (A1), (A2) の中での

$$\sigma = 1/2+\mu, \quad \nu = -3/2+\mu, \quad \mu > 0$$

に対して、h に依存しない正の定数 C があって、

$$\overline{\|u-u_h\|_1} \le Ch^r$$

が成り立つ。ここで、$r = (p+1)\mu \le 1.5$.

(2) 2 点境界問題の差分法の収束解析に関する研究

Ascher-Mattheij-Russell (1988) は、２点境界値問題

$$-u'' + (q(x)u)' + r(x)u = f(x), \quad a<x<b$$
$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta$$

に対して、非一様な区間分割における以下の差分近似公式を提出した。

$$a_i U_{i-1} + b_i U_i + c_i U_{i+1} = \tilde{f}_i, \quad 1\le i\le n$$

ただし、

$$a_i = -\frac{2}{h_i(h_i+h_{i+1})} - \frac{q_{i-1/2}}{h_i+h_{i+1}} + \tilde{r}_i\alpha_i,$$

$$b_i = \frac{2}{h_i h_{i+1}} + \frac{q_{i+1/2}-q_{i-1/2}}{h_i+h_{i+1}} + \tilde{r}_i\beta_i,$$

$$c_i = -\frac{2}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})} + \frac{q_{i+1/2}}{h_i+h_{i+1}} + \tilde{r}_i\gamma_i$$

で、

$$\alpha_i = \frac{1}{16}\frac{(3h_{i+1}+h_i)(h_i-h_{i+1})}{h_i(h_i+h_{i+1})},$$

$$\beta_i = \frac{1}{16}\frac{(3h_{i+1}+h_i)(h_{i+1}+3h_i)}{h_ih_{i+1}},$$

$$\gamma_i = \frac{1}{16}\frac{(h_{i+1}+3h_i)(h_{i+1}-h_i)}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}.$$

しかし、その２次収束性の証明がオープン問題として残された。論文 ⑭ では、以下の結果を証明した。与えあられた正整数N_1とN_2に対して

$$\Gamma=\{1,2,...,N_1,n-N_2+1,n-N_2+2,...,n\}$$

とする。Ascher-Mattheij-Russell 差分近似公式に対して解への２次収束が成り立つ。

収束定理. $q\in C^{2,1}[a,b], r, f\in C^{1,1}[a,b]$ and $q'(x)\ge 0, r(x)\ge 0$ in $[a,b]$ と仮定する。h が十分小さければ、正の定数 c が存在して、Ascher-Mattheij-Russell 差分近似公式の解 U_i は次の誤差評価を満たす：

$$|u_i-U_i|\le\begin{cases}ch^3, & i\in\Gamma,\\ ch^2, & otherwise.\end{cases}$$

さらに、論文 ②, ④ において、２点境界値問題

$$(\#)\begin{cases}-(p(x)u')'+q(x)u'+r(x)u=f(x), & a<x<b,\\ c_0u(a)-c_1u'(a)=0, & \\ d_0u(b)+d_1u'(b)=0 & \end{cases}$$

の解の一意性をその離散かスキームとの関連性を調べた。ここで、c_0, c_1, d_0, d_1 は非負定数で、$c_0+c_1>0, d_0+d_1>0, c_0+d_0>0.$ $r(x)$ の符号は不定で、普通の仮定を拡張した一般的な場合を考えた。次の結果を得た。

定理. (#)の有限差分離散式を

$$H_\nu A_\nu U^\nu = f^\nu$$

で表されるとする。h^νを正整数νに対応する任意の$[a,b]$の分割の最大刻み幅とするとき、次の４つの命題は同値である。

(i) 境界値問題 (#) は一意的に解を持つ。

(ii) ある正整数 ν_0 が存在して、$\nu\ge\nu_0$ に対し、行列 A_ν は正則である。さらに、$A_\nu^{-1}=(g_{ij}^\nu)$ とするとき、$|g_{ij}^\nu|\le M$ $\forall i,j$ が成立するようなh^νに依存しない正の数 $M>0$ が存在する。

(iii) 任意の$\nu\ge\nu_0$に対して、行列A_νが正則であれば、$\|A_\nu^{-1}H_\nu^{-1}\|_\infty\le M'$, $\nu\ge\nu_0$ を満たすh^νに依存しない正の数 $M'>0$ が存在する。

(iv) 任意の$\nu\ge\nu_0$に対して、行列 A_ν は正則で、かつ

$$M_s=\sup_{\nu\ge\nu_0}\|U^\nu(s)\|_\infty<\infty$$

は任意の$s=s(x)\in C[a,b]$に対して成り立つ。ここで、$U^\nu(s)=(H_\nu A_\nu)^{-1}s^\nu$ はシステム $H_\nu A_\nu U^\nu=s^\nu$ の一意的な解である。

(3) n次代数方程式の根を求める高速な反復法に関する研究

n次代数方程式

$$A_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

に対し、次のような同時に求める反復法を提出して、その収束性を示した。（論文 ⑬）

$A_n(x)=Q_m(x)T_{n-m}(x)$ と書く。ここで、$Q_m(x)=x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$ は根が求められる多項式で、$T_{n-m}(x)=x^{n-m}+c_1x^{n-m-1}+\ldots+c_{n-m}$ は根が計算されない多項式である。

$$b_1^k=-\sum_{j=1}^m x_j^k,\ b_2^k=\sum_{j=1}^{m-1}(x_j^k\sum_{s=j+1}^m x_s^k),\ldots,$$

$$b_{n-m}^k=(-1)^m\prod_{j=1}^m x_j^k.$$

さらに、

$$c_1^k=a_1-b_1^k,\ c_2^k=a_2-b_2^k-c_1^kb_1^k,\ldots,$$

$$c_{n-m}^k=a_{n-m}-b_{n-m}^k-\sum_{j=1}^{n-m-1}c_j^kb_{n-m-j}^k$$

と計算すると、$T_{n-m}^k(x)$ が簡単に計算できる。新しい反復法は、

$$x_i^{k+1}=x_i^k-\sigma_i^k\Big[1+\sigma_i^k\Big(\sum_{j\ne i}^m\frac{1}{x_i^k-x_j^k}+\frac{T_{n-m}^k{}'(x_i^k)}{T_{n-m}^k(x_i^k)}\Big)\Big],$$

$$i=1,2,\ldots,m;k=0,1,2,\ldots$$

収束定理.

$$d=\min_{i\ne j}|x_i-x_j|>0, 1>q>0$$

とする。$\exists\sigma>0$, このσに対して、$c>0$ を $d-2c>c(n-1)$ と

$$c^2[\sigma(d-2c)^2+(n-1)^2+m-1]<[d-2c-c(n-1)]^2$$

を満たすように選ぶ。このとき、

$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-m}^0$： 初期値

$$|x_i^0-x_i|<cq,\quad i=1,2,\ldots,m$$

をみたす新しい反復法の解 x_i^k に対しては、

$$|x_i^k - x_i| < cq^{3^k}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

が成り立つ。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 16 件）

① Zi-Cai Li, Qing Fang, Song Wang and Hsin-Yun Hu, Superconvergence of solution derivatives of the Shortley-Weller difference approximation to elliptic equations with singularities involving the mixed type of boundary conditions, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 29 (2008), 161-196. （査読あり）
② Tetsuro Yamamoto, Shin-ichi Oishi and Qing Fang, Discretization principles for linear two-point boundary value problems, II, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 29 (2008), 213-224. （査読あり）
③ Zi-Cai Li, Hsin-Yun Hu, Song Wang, Qing Fang, Superconvergence of solution derivatives of the Shortley-Weller difference approximation to Poisson's equation with singularities on polygonal domains, Applied Numerical Mathematics 58 (2008), 689-704. （査読あり）
④ Tetsuro Yamamoto, Shin'ichi Oishi, M. Zuhair Nashed, Zi-Cai Li and Qing Fang, Discretization principles for linear two-point boundary value problems, III, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 29 (2008), 1180-1200. （査読あり）
⑤ Payer Ahmed and Shinzo Kawamura, Chaotic homeomorphisms of compact subspaces of the real line, Bull. Yamagata Univ., Nat. Sci. 16 (2008), 15-21. （査読あり）
⑥ Hiroshi Haramoto, Makoto Matsumoto, Takuji Nishimura, Francois Panneton and Pierre L'Ecuyer, Efficient jump ahead for F_2-linear random number generators, INFORMS J. Comput. 20 (2008), 385-390. （査読あり）
⑦ Hideki Sawada and Qing Fang, On the utility of a bilateral system, Information 10 (2007), 183-191. （査読あり）
⑧ H.Wang and S.Kawamura, Strange topological conjugates between two tent maps, Far East Journal of Dynamical Systems 9 (2007), 17-44. （査読あり）
⑨ M.Harada, T.Nishimura and R.Yorgova, New extremal self-dual code of length 66, Mathematica Balkanica (N.S.) 21 (2007), 113-121. （査読あり）
⑩ M.Harada and T.Nishimura, An extremal singly even self-dual code of length 88, Advances in Mathematics of Communications 1 (2007), 261-267. （査読あり）
⑪ H.Haramoto, M.Matsumoto and T.Nishimura, Computing conditional probabilities for F2-linear pseudo-random bit generators by splitting MacWilliams identity, International Journal of Pure and Applied Mathematics 38 (2007), 29-42. （査読あり）
⑫ M.Matsumoto, M.Saito, M.Hagita and T.Nishimura, A fast stream cipher with huge state space and quasigroup filter for software, Selected Areas in Cryptography, Lecture Notes in Computer Science 4876 (2007), 246-263. （査読あり）
⑬ A.Iliev, N.Kyurkchiev and Qing Fang, On a generalization of the Euler-Chebyshev method for simultaneous extraction of only a part of all roots of polynomials, Japan J. Indust. Appl. Math. 23 (2006), 63-73. （査読あり）
⑭ Qing Fang, Convergence of Ascher-Mattheij-Russell finite difference method for a class of two-point boundary value problems, Information 9 (2006), 563-572. （査読あり）
⑮ P.Ahmed, S.Kawamura and S.Sasaki, Banach lattices and the Perron-Frobenius operator associated with chaotic map, Far East Journal of Dynamical Systems 8 (2006), 1-25. （査読あり）
⑯ M.Matsumoto, T.Nishimura, M.Saito and H.Haramoto, Pseudorandom number generation: impossibility and compromise, J. Univer. Comput. Sci. 12 (2006), 672-690. （査読あり）

〔学会発表〕（計 12 件）

① 方青、楕円型境界値問題の解の一意性について、第１２回環瀬戸内応用数理研究部会シンポジウム、2008 年 10 月 10 日～12 日、山形大学
② 方青、楕円型混合境界値問題の差分解の微分の超収束性、日本数学会秋期総合分

会、2008 年 9 月 24 日～27 日、東京工業大学

③ Shinzo Kawamura, A chaotic property of a conjugacy connecting two tent maps, Operator Structures and Dynamical systems, July 20-24, 2008, Leiden University

④ Qing Fang, Effect of stretching functions to non-uniform FDM for Poisson-type equations on a disk with singular solutions, The 7th International Conference on Optimization: Techniques and Appliactions, December 12-15, 2007, Kobe International Conference Center.

⑤ 方青、Error estimate of numerical solutions by the finite difference method for boundary value problems, 首都大学東京・数理解析セミナー、2007 年 11 月 15 日、首都大学東京

⑥ 西村拓士、長周期線形擬似乱数について、日本応用数理学会 2007 年度年会、2007 年 9 月 17 日、北海道大学

⑦ 方青、特異性の解を持つ Dirichlet 境界値問題に対する Shortley-Weller 近似解の微分の超収束性、日本応用数理学会 2007 年度年会、2007 年 9 月 16 日、北海道大学

⑧ 方青、ポアソン方程式の差分解の微分の超収束について、第 11 回環瀬戸内応用数理研究部会シンポジウム(岡山理科大学)、2007 年 7 月 6 日

⑨ Shinzou Kawamura, Orthogonal Systems associated with Chaotic maps, Harmonic Analysis and Orthogonal Expansions, September 24-29, 2006, Bedlewo, Poland.

⑩ H.Wang and S.Kawamura, The devil step and a strange slope, 「バナッハ空間及び関数空間の構造の研究」研究集会、2006 年 6 月 7 日～9 日、京都大学数理解析研究所

⑪ 山本哲朗・大石進一・方青、線形２点境界値問題が一意解を持つために差分方程式と有限要素方程式がみたすべき必要十分条件、日本数学会秋期総合分会、2006 年 9 月 19 日～22 日、大阪市立大学

⑫ 方青、Convergence of Finite Difference Methods for Poisson-Type Equations with Singular Solutions, The First China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics & The Second East Asia SIAM Symposium, August 3-6, 2006, Hokkaido University & Sapporo Convention Center.

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

○取得状況（計　件）

〔その他〕

６．研究組織
(1)研究代表者
　方　　　青（Qing Fang）
　山形大学・理学部・教授
　研究者番号：10243544
(2)研究分担者
　河村　新蔵（Shinzo Kawamura）
　山形大学・理学部・教授
　研究者番号：50007176

(3)連携研究者
　澤田　秀樹（Hideki Sawada）
　山形大学・学術情報基盤センター・教授
　研究者番号：30095856
　西村　拓士（Takuji Nishimura）
　山形大学・理学部・助教
　研究者番号：90333947