

研究種目：	基盤研究 (C)
研究期間：	2006～2009
課題番号：	18540108
研究課題名 (和文)	差分法に基づく超高精度数値解法の構築と非適切な偏微分方程式逆問題への応用
研究課題名 (英文)	Development of highly accurate numerical method based on finite differences and its application to ill-posed problems of partial differential equations.
研究代表者	
	大西 和榮 (ONISHI KAZUEI)
	茨城大学・理学部・教授
	研究者番号：20078554

研究成果の概要(和文)：世に広く知られるようになってきた鉱物資源探査、工学非破壊検査、医療診断における CT 検査等々は、数理科学では「逆問題」の名で総称される。この問題の特徴は、確定した答えがあるとは必ずしも言えないこと、測定に際してのちょっとした誤差が、答えに重大な変化を与える可能性のあることである。解きにくく、性質の悪いこの逆問題を、コンピュータを用いて精度良く安全に解く方法を研究した。

研究成果の概要 (英文)：Recently natural resource probe in the mining industry, nondestructive testing in engineering, computer tomography in medical diagnosis, and so on are widely known. The mathematical aspect involved in these issues are called inverse problem. The problem is featured by an ill-posed problem in which there may be no definite solution and the solution, even if it exists, is strongly influenced by only small errors in the measurement. In the present research we proposed a computer method that gives accurate and stable answers to the inverse problem.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	600,000	0	600,000
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総計	3,200,000	780,000	3,980,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：応用数学、逆問題、数値解法、偏微分方程式、正則化

1. 研究開始当初の背景

非適切問題として典型的なラプラス方程式に対する一般的なコーシー問題や、時間逆向熱伝導方程式の初期値・境界値問題について、超高精度の数値解を作るためには、境界要素法による離散化には限界が感じられた。

そこで、汎用性を保ったまま離散化の精度を容易に上げることのできる差分法の開発に取り掛かった。高次の差分法を、本研究では指数関数群を基底に用いて開発し、これを指数関数補間による任意多点差分法と命名した。この補間法により 50 次程度までの精度

向上が容易に行えるようになった。

一方、コンピュータ内での四則演算における丸め誤差をも、離散化精度の向上にあわせて小さくしなければならなかった。京都大学情報学研究科・藤原氏によって開発されていた任意計算精度演算プログラム **exflib** を提供いただいて、解が特異点を持たないようなラプラス方程式の逆問題であれば、十分に精度の高い数値解を構成することができる感触を持っていた。

2. 研究の目的

解がデータに連続的に依存しないという意味での非適切な問題、特に偏微分方程式の逆問題と通称される問題を数値的に解く強力な方法を展開した。対象とした非適切な問題をラプラス方程式の初期値問題（コーシー問題）と時間逆向き熱伝導問題の最終値（注：初期値の反対語）境界値問題に特化し、これら2つの典型的な逆問題について、完璧な数値解を示すことを研究の目的とした。

3. 研究の方法

「超高精度数値解法」における「超」とは、通常の精度を超えるほどの意味である。具体的には有効数字が、10進法百桁程度を想定した。偏微分方程式の近似解法が極力簡単であること、使用するコンピュータが特殊なタイプでないこと（通常市販されているパソコン上で運用できる計算機環境を利用する）の2つを方法開発の指導原理とした。いわゆる『工夫のないことを工夫する』ことを目指した。指数型多点差分法と任意多倍長演算システムを融合した。

4. 研究成果

(1) 特異点を持たず、かつデータに誤差のない場合に対して、研究目的を実現し、論文として発表した。

円環外周四分の一の周上にコーシーデータを与えて、円環内部に調和接続した結果を図1に示す。この計算における計算精度を図2に示す。20桁の精度が得られている。

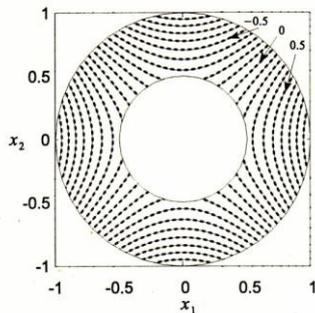


図1. 調和接続計算結果

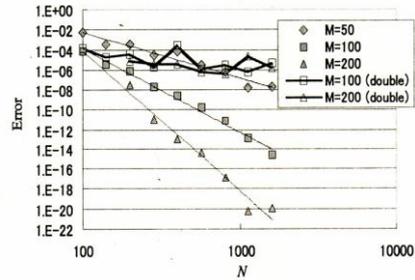


図2. 調和接続の計算精度

(2) 特異点がある場合には、たとえ特異点の位置が、問題の領域の外部になるとしても、我々の数値解は特異点の存在の影響を強く受けて、所望通りの精度ではまったく得られないことを多く経験した。この経験を逆手にとって、特異点の存在と位置を探索する方法を提案できた。

(3) 逆向き熱伝導問題において、採取時点を時刻1とし、この時点における温度分布から、時間を遡って時刻0における温度分布を求めることができた。

角柱断面の初期時刻温度分布を図3に示す。この計算に用いた多点差分の配置を図4に示す。2次元熱伝導逆問題を、時空3次元問題としてモデル化している。

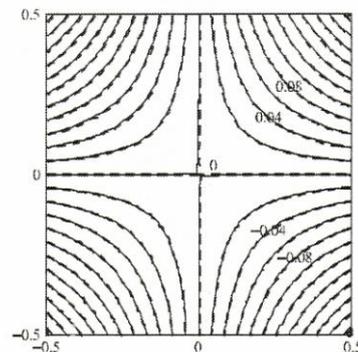


図3. 角柱断面における初期温度分布

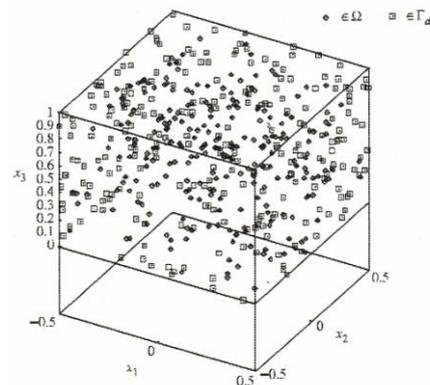


図4. 逆向き熱伝導問題の多点差分点

実用問題の応用のために、冷却フィンのある領域における逆向き熱伝導問題の計算結果を図 5 に示す。この例から分かるように、本法は、非格子構造の差点配置を自然に許容する計算方法となっている。

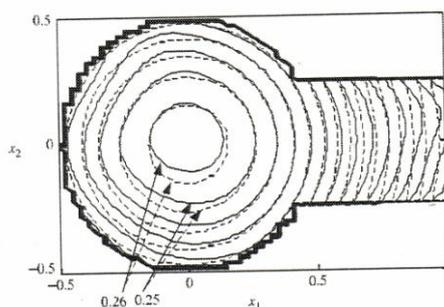


図 5. 冷却フィンをもつ熱伝導体

(4) データにノイズが含まれる場合を許容する正則化法の構築に重点を置いた。離散化後に得られる連立一次方程式において、擾乱の混入した右辺を確率過程と見做し、フィルタリングを組み合わせる方法を案出した。フィルタリングの定式化においては、その数学的根拠が明確となるように数学的証明を与えた。問題を安定化させるためには、係数行列に対してランク低減法を適用し、このランク低減が数値解析の立場からも保証の付く健全な考えであることを、学会発表で示した。

円環内の円弧スリットに誤差を含むコーシーデータを与えて円環内へ調和接続した計算結果を図 6 に示す。データに含まれる誤差の影響が円孔の向かい側の領域に現れている。このとき用いた多点差分点の配置を図 7 に示す。

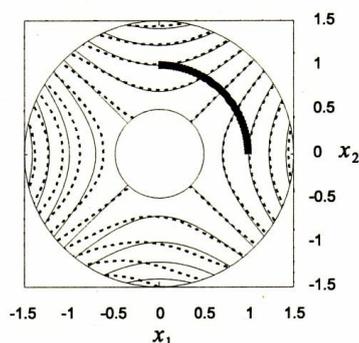


図 6. スリット調和接続 (誤差データ)

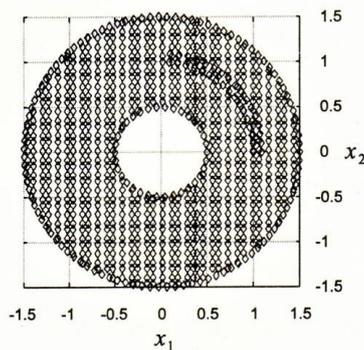


図 7. スリット接続の多点差分点

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① 大西和榮、大浦洋子、繁田岳美、代田健二、誤差のあるコーシーデータをもつラプラス方程式を念頭においたランク低減法、計算数理工学論文集、日本計算数理工学会、査読有、Vol. 8, 2008, 43-48.
- ② K. Onishi, K. Shirota, and T. Shigeta, Numerical solution to the Cauchy problem of the Laplace equation with noisy data. The 57th Japan National Congress for Theoretical and Applied Mechanics, Theoretical and Applied Mechanics Japan, 査読有、Vol. 57, 2008, 481-486.
- ③ K. Iijima and K. Onishi, Lattice-free finite difference method for numerical solution of inverse heat conduction problem. Inverse Problems in Science and Engineering Journal, 査読有、Vol. 15-2, 2007, 93-106.

[学会発表] (計 4 件)

- ① 大西和榮、小林錦子、大浦洋子、ランク低減法による係数行列の正則化、第 58 回理論応用力学講演会講演予稿集、2009, 477-478.
- ② K. Onishi, K. Shirota, and T. Shigeta, Regularization by rank reduction associated with the Cauchy problem of the Laplace equation. Abstracts in the International Conference on Inverse Problems and its Applications, Fudan University, Shanghai, China, p. 31, 2008
- ③ 大西和榮、繁田岳美、代田健二、誤差のあるデータをもつラプラス方程式の初期値問題に対するランク低減法、日本応用数学会 2008 年度年会講演予稿集、

- 東京大学柏キャンパス、2008、291-292.
- ④ 大西和榮、行列の特異値分解に対する一考察、科研費研究集会「応用解析学の諸相」、京都大学大学院情報科学研究科、科学研究費・基盤研究 B「応用逆問題・非適切問題に対する新しい数値解法の確立」3月13-14日、2007.

[図書] (計1件)

田端正久、萩原一郎 (監訳)、大西和榮、他多数 (翻訳分担)、計算力学ハンドブック、朝倉書店、近刊、2010.

[その他]

ホームページ等

<http://info.ibaraki.ac.jp/scripts/websearch/index.htm>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大西 和榮 (ONISHI KAZUEI)

茨城大学・理学部・教授

研究者番号：20078554

(2) 研究分担者

代田 健二 (SHIROTA KENJI)

茨城大学・理学部・准教授

研究者番号：90302322

大浦 洋子 (OHURA YOKO)

九州情報大学・経営情報学部・教授

研究者番号：70122695

(3) 連携研究者 なし