様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年　5 月　30 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００６ ～ ２００９
課題番号：１８５４０１１３
研究課題名（和文）楠岡近似に依る拡散過程の数値計算の新しいアルゴリズムと
ファイナンスへの応用
研究課題名（英文） Construction of new algorithms for numerical weak approximation of Diffusion Processes by Kusuoka scheme and their applications to Finance problems

研究代表者
二宮　祥一（SYOITI NINOMIYA）
東京工業大学・大学院イノベーションマネジメント研究科・教授
研究者番号：７０３１３３７７

研究成果の概要（和文）：(1)楠岡近似の原理に従って確率微分方程式で記述される拡散過程の高次弱近似を可能とする、頑健で汎用的な数値計算アルゴリズムを発見・構成した。 (2)数理ファイナンスへの応用によりその有用性:(a) 計算の劇的な高速化 (b) 頑健な離散化の実現 (c) 汎用性、を検証した。(3)そのアルゴリズムが広く社会に受け入れられるように計算機プログラムを開発した。
研究成果の概要（英文）：(1) We have succeeded in finding and constructing new higher-order numerical approximation algorithms for diffusion processes. The algorithms are based on the theory of Kusuoka approximation. They enjoy both the numerical robustness and the universality, that is, we can apply them for almost all diffusions. (2) We applied the algorithms to some finance problems and achieved remarkable improvements in: (a) very fast calculation (at least 100 times faster than the state of the art methods) (b) robust discretization (c) universality. (3)We have developed the computer program of the algorithms.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	900,000	0	900,000
２００７年度	600,000	180,000	780,000
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
２００９年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	3,000,000	630,000	3,630,000

研究分野：確率論、数理ファイナンス
科研費の分科・細目：数学一般(含確率論・統計数学)
キーワード：確率論、数理工学、アルゴリズム

１．研究開始当初の背景

確率微分方程式で記述された拡散過程 X(t; x) と関数 f が与えられている時、(A) E[f(X(t; x))]を求める問題は、確率数値解析の大きなテーマである。研究開始当時、金融産業における金融派生商品の取引とリスク管理への確率解析の応用が一般的になるにしたがい、この問題の重要性はさらに高まっていた。実際、金融派生商品の価格づけは、まさに(A) の計算そのものである。この場合、X(t; x) は資産の価格変動を記述する確率過程となる。そして、一つの取引の度に、この計算が行なわれる。また、リスク管理においては金融機関が保有する一つ一つの派生商品の価格計算

が行なわれるがこれも同じ計算である。このように、(A) の計算は金融機関においては日々非常に大量に行なわれるため、この計算の高速化への要求は非常に大きいものであった。この状況は現在も変わりない。
当時も今もこの(A) の計算方法として知られているのは、問題を偏微分方程式の境界値問題に帰着させる方法と、拡散過程 X(t; x) をEuler-丸山近似によって差分近似して(A) を高次元数値積分に帰着させる方法の二つであるが、実用的には Euler-丸山近似のように拡散過程を近似する方法が望ましい。Euler-丸山近似による拡散過程の近似を用いて(A) を高次元数値積分に帰着させる方法は、実用の面から多くの美点を有するが高次元数値積分は計算量が非常に大きいという宿命を持つ。従来、この様な高次元数値積分は Monte Carlo 法が最も良く用いられる手段であったが、申請当時、申請者らの研究によって低食い違い量列を用いる方法(これを Quasi-Monte Carlo 法という)が(A) に対しては有効であることが知られる様になりつつあり、一部実用化される段階にあった。これにより、(A) を出来るだけ少ない次元の数値積分に帰着させることが重要であることがわかる。被積分関数の次元に対して計算量が不変である Monte Carlo 法の場合と異なり、Quasi-Monte Carlo 法の場合は被積分関数の次元が少ないと必要な計算量が減少するからである。
この様な問題意識の下に、申請者は、1999 年に本申請の研究分担者である東京大学の楠岡成雄([Kusuoka 2001, 2004]) に依って提案された新しい拡散過程の近似法(以下、楠岡近似)に注目し、この近似法によって数値積分の次元を小さくし、或る種の金融派生商品の価格計算において数百倍という劇的な高速化を達成した [Ninomiya 2003a, 2003b][Kusuoka and Ninomiya 2004]。この結果は確率数値解析の研究者および金融機関の実務家達の間で注目を集め、申請者は 2004 年に Oxford 大学の Lyons、Victor らに招かれ共同研究を、2005 年にフランス INRIA で招待講演を行なった。更に、国内金融機関と共同研究を行なった。2004 年に、申請者は Victoir と共に楠岡近似を実現する新しい手法を開発した。楠岡近似は確率微分方程式の高次近似を行う方法であるが、そのまま実装しようとすると厖大な記号計算が要求され、実装が難しくなる。この新しい手法は、古典的な常微分方程式の数値解法の技術を巧妙に用いることで数値的に楠岡近似を実現するものであり、汎用性が高く実装が容易であるという特徴を持つ。更に、最近になって、この手法は誤差が漸近展開を有する為、更なる高速化が可能となることが楠岡により証明された。

参考文献
[Kusuoka 2001] ``Approximation of Expectation of diffusion processes and Mathematical Finance”, Shigeo Kusuoka, Advanced Studies in Pure Mathematics 31, Proceedings of Final Taniguchi Symposium, Nara 1998, ed. T.Sunada, pp.147--165, (2001)
[Kusuoka 2004] `` Approximation of expectation of diffusion processes based on Lie algebra and Malliavin calculus”, Shigeo Kusuoka, Advances in Mathematical Economics vol. 6, (ed. S. Kusuoka, M. Maruyama), pp. 69--83, Springer (2004).
[Kusuoka and Ninomiya 2004] `` Approximation of expectation of diffusion processes based on Lie algebra and Malliavin calculus”, Shigeo Kusuoka, Advances in Mathematical Economics vol. 6, (ed. S. Kusuoka, M. Maruyama), 69--83, Springer (2004).
[Ninomiya 2003a] ``A partial sampling method applied to the Kusuoka approximation”, Syoiti Ninomiya, Monte Carlo Methods and Applications Vol. 9, No. 1 (2003), pp. 27--38
[Ninomiya 2003b] ``A new simulation scheme of diffusion processes: application of the Kusuoka approximation to finance problems”, Syoiti Ninomiya, Mathematics and Computers in Simulation Vol. 62/3-6 (March, 2003), pp. 479—486

２．研究の目的
本研究では、この楠岡近似を本格的に数理ファイナンスに現われる(A) の数値解法の道具として完成させることと、この手法によって、数理ファイナンス新しい領域の研究を行なうことを目的とする。この目的の為に考えられる課題は以下の通り:
（1）楠岡近似を実現する、申請者と Victoir の方法以外の方法を探すこと。特により高次の
方法が見つかれば(現在の方法は 5 次の近似なので、7 次以上のものが欲しい) その意義は大変に大きい。又、これらの各手法に関して、近似誤差が漸近展開を有するか、時間の離散化の方法と近似誤差の関係はどうなるか、という点の理論的解明は実用上からも意義が大きい。
（2） 現在、取引が多い金融派生商品の中には、今の楠岡近似の理論が適用可能でないものが存在する。これらに適用する為の理論研究。具体的には、バリアオプションとルックバッ
クオプションが非常に重要である。
（3） この手法を、数値計算ライブラリとし

て、実務家や専門外のユーザーにも使用可能なものとすること。この為には、数値計算の知識を投入した頑丈なプログラムの開発が必要となる。

(4)　今迄数値計算が不可能であると考えられ為に考慮されなかったようなモデルのうち、上述の申請者と Victoir の手法により計算可能となるものが存在する。それらを実際に計

算することで数理ファイナンスの新しい応用領域を見付ける。有望と考えられるのは資産運用の動的戦略の問題である。現在、投資顧問会社等でファンドを運用する際に用いられているのは基本的に静的なモデルである。デリバティブの価格理論と同様の確率微分方程式によるモデル化を用いた動的戦略に関しては幾つかの理論研究があるが、計算が事実上不可能であるために、その有効性を含め深く検討されているとは言えない状況にある。

３．研究の方法

本研究の目的は、楠岡近似を本格的に数理ファイナンスに現われる確率微分方程式の弱近似の道具として完成させることである。考えられる具体的な課題は

(1)　経路依存型デリバティブのなかで幾つかの重要なものを楠岡近似で計算する方法の確立。特に、バリアーオプションとルックバックオプションの二つは実務上非常に重要であるが、今のところ楠岡近似で計算が可能かどうか不明である。

(2)　楠岡近似の、専門外のユーザーが簡単に使用可能な数値計算ライブラリを開発し公開すること。

(3)　楠岡近似を実現する新しいアルゴリズムを探すこと。特により高次(7 次以上) の方法を見つけたい。さらに、これらの新しいアルゴリズムに関し、近似誤差の性質の究明が重要である。

(1) については、まず有望そうなアルゴリズムを数値計算によって調べるという作業を行なうことが重要である。この作業に於いては、大量の数値計算が必要となるため、ある程度の計算能力を持つ計算機は必須となる。並行して (3)　の理論研究を研究分担者と共にすすめる。この研究においては、自由 Lie 環の計算が現われるが、これは大量の記号処理計算になるので、速い計算機と数式処理ソフトウェアが必要である。設備備品で要求している計算機およびソフトウェアはこれらの作業の為である。

(2)　については、ある手法が確立した段階で適宜ライブラリ化作業を行なうこととする。本申請者と Victoir の手法、および本研究に於いて新たに良いアルゴリズムが得られた場合、それらのライブラリ化を行なう

４．研究成果

本研究の成果は以下の通りである。

楠岡近似の理論について:(1)楠岡近似のアルゴリズムのなかのある種のもの(例えば[Ninomiya-Victoir 2008]によるもの、または[Ninomiya-Ninomiya 2009]によるものはこれに相当する)は Romberg 外挿が可能であることが証明された。(2)Ninomiya-Victoir 型とは全く異なる新しいアルゴリズムのクラスが発見され、このクラスのアルゴリズムによる２次近似の実例及び一般の次数の場合の必要条件が得られた[Ninomiya-Ninomiya 2009]。

応用について:

(1)[Ninomiya-Ninomiya 2009]に於いて確率ボラティリティモデルの下でのアジア型オプションの価格付けに対し、本研究で新たに得られたアルゴリズムは以前のものよりも更に高速であることが示された。(2)最大の課題である、ヨーロッパ型以外のデリバティブ、特にバリア型オプションについて、Ninomiya-Victoir 型の基にした新しいアルゴリズムが有効な場合があることが数値的に示され、この特定の場合に関しては理論的な証明も得られている。この結果については更に一般の場合の証明を目指しており、その後に発表の予定である。(3)汎用的に使用可能な計算機プログラムを開発した。本手法には quasi-Monte Carlo 法との併用が本質的であるため、quasi-Monte Carlo 法のライブラリ(現在準備中)と共にドキュメントを整備して公開準備をしているところである。

５．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計６件)

全て査読有

(1) <u>Shigeo Kusuoka</u>, ``A certain Limit of Iterated CTE", Adv. in Math. Eco.vol. 13(2010)　pp. 99--111.

(2) Mariko Ninomiya and <u>Syoiti Ninomiya</u>, ``A new higher-order weak approximation scheme of stochastic differential equations and the Runge-Kutta method" (with Mariko Ninomiya), Finance and Stochastics vol. 13, No. 3 (September, 2009), pp. 415--443.

(3) <u>Syoiti Ninomiya</u> and Nicolas Victoir, ``Weak approximation of stochastic differential equations and application to derivative pricing", Applied Mathematical Finance, vol. 15, No. 2, pp. 107--121 (April 2008)

〔学会発表〕(計３件)

(1) <u>Shigeo Kusuoka,</u> ``Approximation of

Expectation of Diffusion Processes with Dirichlet boundary", International Workshop on Mathematical Finance : Topics on Leading-edge Numerical Procedures and Models, 16,17,18 February 2010, Tokyo

(2) 二宮祥一、A higher-order weak approximation method of SDEs、Workshop: Computational Finance、2009 年 8 月 10 日～12 日、京都大学数理解析研究所

(3) 二宮祥一、A higher-order weak approximation method of SDEs and the Runge-Kutta method、Workshop “Small time asymptotics, perturbation theory and heat kernel methods in mathematical finance”、2009 年 2 月 10 日～12 日、Wolfgang Pauli Institute, Vienna

(4) 二宮祥一、確率微分方程式の新しい弱近似法：楠岡近似とそれを実現するアルゴリズム、計算による数理科学の展開 2009 (研究集会)、2009 年 1 月 8 日～9 日、神戸大学理学部

(5) Syoiti Ninomiya, ``On the algorithms for the Kusuoka scheme'', The International Conference on Mathematical Finance and its Applications, 21--23 August 2006 (Kanazawa Univ., Kanazawa, Japan)

(6) Shigeo Kusuoka, Mariko Ninomiya, and Syoiti Ninomiya, ``A new weak approximation scheme of stochastic differential equations by using the Runge-Kutta method’’, Bachelier Finance Society 2006 4th World Congress Tokyo, 2006/8/17--20 (Tokyo)

６．研究組織

(1)研究代表者

二宮　祥一　(SYOITI NINOMIYA)

東京工業大学・大学院イノベーションマネジメント

研究科・教授

研究者番号：７０３１３３７７

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

楠岡茂雄 (Shigeo Kusuoka)

東京大学・大学院・数理科学研究科・教授

研究者番号：00114463