様式 C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 4 月 15 日現在

**研究種目：基盤研究（C）**
**研究期間：2006～2008**
**課題番号：18540132**
**研究課題名（和文）　有限射影平面と GL 半正則 STD と LO 半正則 STD**

**研究課題名（英文）　Finite projective planes, GL-semiregular STD, and LO-semiregular STD**

**研究代表者**
**末竹　千博(SUETAKE CHIHIRO)**
**大分大学・工学部・教授**
**研究者番号：80353241**

研究成果の概要：elation 群を使って，対称横断デザインを縮小する方法をつくった。この方法を使って, STD_2[12;6]が非自明な elation を持たないことを示した。クラスサイズ 3 の GL 正則 STD の分類をブロックサイズ 18 までした。位数 12 の射影平面が位数 8 の自己同型群を持たないことと，位数 9 の巡回自己同型群を持たないことを示した。

交付額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| 2006 年度 | 1,000,000 | 0 | 1,000,000 |
| 2007 年度 | 700,000 | 210,000 | 910,000 |
| 2008 年度 | 700,000 | 210,000 | 910,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 2,400,000 | 420,000 | 2,820,000 |

研究分野：代数的組合せ論，有限幾何学
科研費の分科・細目：数学，数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：対称横断デザイン，有限射影平面，有限幾何学

１．研究開始当初の背景

有限射影平面の位数は素数べきであるという有名な予想がある。この予想の根拠となる定理は Bruck and Ryser の定理である。しかしながら，この定理で非存在が言えない有限射影平面の位数は無限に多くある。存在・非存在がわかっていない一番小さい有限射影平面の位数は 12 である。位数 12 の射影平面の研究 1980 年代から Z. Janko と T. van Trung によって開始された。ただ彼らの研究は 1980 年代に中止してしまった。その問題の難しさからそうなったのであろう。この研究には，K. Horvatic-Baldasar と E. Kramea と I. Matulic-Bedenic の 3 人組みも加わり(彼ら 3 人組みは位数 12 の射影平面について 2 編(1986,1987)の論文を書いた)，最終的に得られた結果は次の通りである。G を位数 12 の射影平面の自己同型群とする。G の位数は 16 の約数かまたは，9 の約数である。筆者は 2004 年の論文で位数 12 の射影平面が存在するならば，位数が偶数の部分群の位数は 8 の約数であることを示した。ここで使った事実は，位数 2 の自己同型を持つ位数 12 の射影平面が存在すれば，対称横断デザイン STD_2[12;6]が存在するということである。筆者は対称横断デザインとの関係で有限射影平面を研究しようと考えた。これは新しい発想であると思う。従来の位数 12 の射影平

面の研究では，対称横断デザインは意識されていなかった。また，対称横断デザインを独自に研究するのも面白いと思った。クラス正則な対称横断デザインは一般アダマール行列が対応するが，クラス正則という制限を取り払って対称横断デザインを研究すべきだと思った。

## ２．研究の目的

(1) STD_2[12;6]の自己同型群の可能性を調べる。
(2) 対称横断デザインの elation group を使った対称横断デザインの縮小について調べる。
(3) クラスサイズ 3 の対称横断デザインを 2 種類の半正則性を持つ自己同型群(GL と LO)を仮定して調べる。
(4) 対称横断デザインの研究結果を有限射影平面の研究に使う。

## ３．研究の方法

(1) STD_2[12;6]の素数位数の自己同型の可能性を調べる。
(2) 位数 4 の自己同型群が点とブロックの上で半正則に作用する STD_2[12;6]が存在するかどうかを調べる。この結果を使って，位数 12 の射影平面自己同型群の可能性調べる。
(3) 対称分割デザインの elation group を使った対称分割デザインの縮小を調べる。これを対称横断デザインに当てはめてみる。
(4) GH 正則で LO 正則でないクラスサイズ 3 の対称横断デザインを構成してみせる。
(5) 対称横断デザインの枠組みを超えて，位数１２ の射影平面の自己同型群の可能性を調べる。このために自己同型群の群環を使う。

## ４．研究成果

(1) πを有限射影平面とする。B をπの点集合のある部分集合とする。このとき，πの全ての直線がBと交わる場合, Bをblocking set という。ただし，B はπのいかなる直線も含まないものとする。更にこの B が次の条件を満たすとき, B を blocking semioval という。B の任意の点 P に対して, P を通る直線 l で, l が B と P でのみ交わるようなものが唯一つ存在する。Blocking semioval の研究は 2000 年から, J.M.Dover により研究が開始された。位数 9 の射影平面は完全に分類されていて丁度 4 個ある。この 4 つの平面において，あるタイプの blocking semioval を調べた。

位数 9 の任意の射影平面において，8 点で交わる blocking semioval のサイズの可能性を完全に決定した。Dover の結果によると, 20≦(S のサイズ)≦24 であるが，この不等式が 21≦(S のサイズ)≦24 に強められることを示した。特にデザルグ平面の場合は末竹の 2000 年の論文で示された結果を使うと，22≦(S のサイズ)≦24 となっている。

(2) 位数 4 の自己同型群が STD_2[12;6]の点とブロックの上で半正則に作用するようなものは存在しないことを示した。更にこれを位数 12 の射影平面に適用し, 次の結果を得た。位数 12 の射影平面の自己同型群の位数の可能性は，1,2,3,4,9 である。更に，位数が 9 の自己同型群は巡回群であるか，または基本可換群である。その他の場合は，自己同型群はすべて巡回群である。

(3) (2)の結果を得るために，一般の対称横断デザインにおける自己同型に関する軌道定理をつくった。それは次の等式である。f を対称デザイン D の自己同型とする。このとき，(f が不変にする点クラスの個数)+(f が固定するブロックの個数)=(f が不変にするブロッククラスの個数)+(f が固定する点の個数)。この定理から次の定理を得た。G を対称横断デザイン D の自己同型群とする。このとき，(G の点クラスたちの上の軌道の個数)+(G のブロックたちの上の軌道の個数)=(G のブロッククラスたちの上の軌道の個数)+(G の点たちの上の軌道の個数)。

これは有限射影平面の自己同型の軌道定理の部分的一般化になっている。この対称横断デザインにおけるこれら 2 つ軌道定理はその自己同型群の形を解析するときに有効な道具となり得る。この定理だけを見ても興味ある結果である。

(4) クラスサイズ 3 の GL 正則対称横断デザイン D の分類をブロックサイズが 18 まで分類した。ここで，GL 正則を引き起こす自己同型群を K とし，k を D のブロックサイズとする。k=6,15,18 の場合は D は存在しない。k=3 の場合は，(D,K)は 1 種類しかない。k=9 の場合は，(D,K)は 4 種類ある。k=12 の場合は，(D,K)は 3 種類ある。

更に点とブロックの上に正則に作用する自己同型群を持つ STD_7[21;3]を構成した。また，GL 正則であるが，LO 正則でないクラスサイズ 3 の対称横断デザインが無限個作れることを示した。

GL 正則と言う条件をつけなければ STD_6[18;3]は存在するので，GL 正則という条件は強すぎると考えられる。

(5) (4)の研究の反省を受けて，2008 年から全 elation group を含む半正則自己同型群 G を持つ class regular 対称横断デザイン(一般アダマール行列が対応する対称横断デザイン)の研究を開始した。まず，この対称横

断デザインを群環 Z[G]で特徴づけた。次に位数 9 の自己同型群でこのような性質を持つ STD_6[18;3]と STD_7[21;3]を完全に決定した。前者は 20 個あり，後者は 3 個あることがわかった。STD_6[18;3]の個数をみれば，(4)の研究が飛躍的に改善されたことがわかる。これら 20 個の対称横断デザインは既知の 2 つの対称横断デザインから作られたものが多いと思うが，実際には調べていない。STD_7[21;]については，1991 年に B. Brock と A. Murray によって初めて発見された。彼らは 3 つの位数 3 の群の上でサイズ 21 の一般アダマール行列を構成した。これらに対応する非同型な対称横断デザイ STD_7[21;3]は 2 個しかない。2005 年に筆者はそれらとは同型でない位数 21 の自己同型群を持つ STD_7[21;3]を構成した。実はこの STD_7[21;3]は(4)で述べた STD_7[21;3]であることがわかった。上記の後者の残り 2 個の STD_7[21;3]は新しいものである。この研究では，これらの STD_6[18;3]と STD_7[21;3]の全自己同型群の位数と，それらの点クラスたちの上とブロッククラスたちの上での軌道構造も決定した。この研究は論文の形にして，現在投稿中である。この研究は現在平峰豊氏により，対称性を仮定しない横断デザインで一般化がなされており，多くの新しい横断デザインが構成されたと聞いている。従って，ここで述べた研究は，一つの飛躍をもたらしたと考えている。

(6) 位数 9 の巡回群を自己同型群として持つ位数 12 の射影平面が存在しないことを示した。また planar である位数 9 の自己同型群を持つ位数 12 の射影平面が存在しないことを示した。Planar の定義を述べておく。G を有限射影平面πの自己同型群とする。このとき，もし G によって固定される点と直線がつくる部分構造がπの部分平面になるならば，G は planar と呼ばれる。従って，位数１２の射影平面の位数 9 の自己同型群は基本可換群で，planar でない。

(7) STD_2[12;6]の存在・非存在はわかっていない。そもそもクラスサイズが素数ベキでない対称横断デザインの存在は知られていない。STD_2[12;6]はそのような対称横断デザインで一番サイズの小さいものである。STD_2[12;6]が存在した場合その自己同型群の可能性を調べた。現時点でわかったことは以下の通りである。G を STD_2[12;6]の任意の自己同型群とすると，G の位数は 2^a×3^b である。ここで，a は非負整数で，b=0,1 である。b=0,1 であることの証明は煩雑すぎてまだ論文として出版されていない。

(8) 対称横断デザインの研究を進めて行く過程で，学生等の指導にも役立たせるために，(1)から(6)まで述べた結果の概説も含む「対称横断デザイン入門」というノートをつくった。このノートでは，有限射影平面と関係する対称横断デザインを主にとりあげた。素数ベキでない位数を持つ有限射影平面を考察する場合，一般アダマール行列だけに対応する対称横断デザインを扱うと研究は進展しない。従って，グラス正則でない対称横断デザインも含めて扱った。一方，新しい一般アダマール行列を見つけるのは興味ある問題である。このあたりも意識して書いた。ただ筆者の勉強不足からサーベイ的なノートにはなっていない。また，新しいパラメータの対称横断デザインを筆者は，現時点では発見していない。このノートの記述を総合的に観察することにより，新しいパラメータの一般アダマール行列の発見に向けてまい進したい。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）


① Chihiro Suetake, Automorphism group of a symmetric tranversal design STD_2[12;6], Journal of Statistical Theory an Practice に掲載予定, (17 ページ), 査読有
② Kenzi Akiyama and Chihiro Suetake, On projective planes of order 12 with a collineation group of order 9, Australasian Journal of Combinatorics, 43, 133-162, (2009), 査読有
③ Kenzi Akiyama and Chihiro Suetake, On STD_k/3[k;3]'s, Discrete Mathematics, 308, 6449-6465, (2008), 査読有
④ Kenzi Akiyama and Chihiro Suetake, The nonexistence of projective planes of order 12 with a collineation group of order 8, Journal of Combinatorial Designs, 16, 411-430, (2008), 査読有
⑤ Yutaka Hiramine and Chihiro Suetake, A contraction of square transversal designs, Discrete Mathematics, 308, 3257-3264, (2008), 査読有
⑥ Chihiro Suetake and Nobuo Nakagawa, On blocking semiovals with an 8-secant in projective planes of order 9, Hokkaido Mathematical Journal, 35, 437-456, (2006), 査読有

〔学会発表〕（計 9 件）

① 末竹千博, The nonexistence of STD_2[12;6]'s with an automorphism group of order 9, 2008 年 6 月 25 日, 北海道大学

② 末竹千博, STD_2[12;6]'s の自己同型群について, 代数的組合せ論とその周辺, 2008 年 5 月 10 日, 崇城大学

③ 末竹千博, 位数 12 の射影平面について, 第 118 回日本数学会九州支部例会, 2008 年 2 月 2 日, 琉球大学

④ 末竹千博, Automorphism group of a symetric transversal design STD_2[12;6], International Conference on Advances in Interdisciplinary Statistics and Combinatorics, 2007 年 10 月 12 日, The University of North Carolina at Greensboro, USA

⑤ 末竹千博, The nonexistence of projective planes of order 12 with a collineation group of order 8, 第 24 回代数的組合せ論, 2007 年 6 月 30 日, 近畿大学

⑥ 末竹千博, Automorphism groups of a symmetric transversal design STD_2[12;3], International Workshop on Combinatorics 2007(Keio Sessions), 2007 年 6 月 8 日, 慶応大学

⑦ 末竹千博, 対称横断デザインにおける軌道定理, 2006 年 11 月 21 日, デザイン理論とその周辺, 上山市「日本の宿古窯」

⑧ 末竹千博, A contraction ofdivisible designs, Algebraic Combinatorics(An International Conference in Hinor of Eiichi Bannai's 60th Birthday), 2006 年 6 月 27 日, 仙台国際センター

６．研究組織

(1)研究代表者

末竹　千博（SUETAKE, CHIHIRO）
大分大学・工学部・教授
研究者番号 80353241