

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006～2009

課題番号：18540142

研究課題名（和文）最小次数と連結度が相互作用するグラフと偶グラフの研究

研究課題名（英文） On Graphs, Even graphs and interaction between minimum degree and connectivity

研究代表者

善本 潔 (YOSHIMOTO KIYOSHI)

日本大学・理工学部・講師

研究者番号：90307801

研究成果の概要（和文）：クローフリーグラフの2因子は一般に連結度の仮定無しに、最小次数条件のみから得ることができる。本研究では、Ryjacek 閉包を使って、グラフの構造を表す2因子の問題を線グラフ及びそのプレイメージグラフの問題に置き換え、その構造の解析を行った。

研究成果の概要（英文）：The existence of 2-factors of claw-free graphs can be determined by minimum degree condition without connectivity. In this research, by using Ryjacek closure, we replace problems on 2-factors in claw-free graphs with 2-factors of line graphs or the preimage graphs and analyzed structures of claw-free graphs.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,000,000	0	1,000,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,300,000	690,000	3,990,000

研究分野：グラフ理論

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：線グラフ、クローフリーグラフ、ハミルトンサイクル、2因子、偶グラフ

## 1. 研究開始当初の背景

本研究者は2005年度のロンドン大滞在中に Jackson 教授との共同研究により、クローフリーグラフの2因子問題と重要なグラフの族である3-正則グラフの間に深い関係があることを発見した。すなわち、Ryjacek の定理より、クローフリーグラフの Ryjacek 閉包によって三角形フリー（プレイメージグラフと呼ぶ）なグラフの線グラフにすることが出来ることが知られていたが、Jackson 教

授との共同研究により、プレイメージグラフの解析にペテルセンの定理「2辺連結3正則グラフは2因子を持つ」を利用できることが発見された。Jackson 教授と本研究者はこの主張を一般化して、「2辺連結3正則グラフは全ての連結成分が4頂点以上からなる2因子を持つ」及び「3辺連結3正則グラフは全ての連結成分が5頂点以上からなる2因子を持つ」を示した。

これらの主張はさらに一般のグラフに拡

張ることが出来る。すなわち「3正則」と「2因子」を「グラフ」と「支配的偶グラフ」に置き換えることが出来ることを証明した。

## 2. 研究の目的

クローフリーグラフや線グラフの構造を解析するために、プレイメージグラフの構造を解明する。特に、最小次数や連結度、及び辺連結度がグラフの構造にどのように作用するかを解明する。クローフリーグラフや線グラフの2因子の存在は、最小次数条件で保証することが出来、さらにクローフリーグラフや線グラフの2因子は、プレイメージグラフの支配的な偶グラフに対応している。支配的な偶グラフの存在は辺連結度と密接な関係を持っている。この関係をさらに深く解析することによって、最小次数や連結度が相互にグラフに作用したときに抽出されるグラフの構造を解明する。

## 3. 研究の方法

積極的に海外の研究者を訪問、招へいし、共同研究を行う。実際、イギリスやフランス、アメリカ、中国、チェコを訪問し、Broersma教授やPaulusma博士、Bondy教授、Faudree教授、Xing教授、Ryjacek教授と共同研究を行い、Paulusma博士（イギリス）、Kuzel博士（チェコ）、Brankovic博士（オーストラリア）、Ryjacek教授（チェコ）を招へいして共同研究を行った。また積極的に国際会議に出席して、講演及び最新の研究結果の収集を行った。

## 4. 研究成果

(1) イギリス・ダーラム大学を訪問し、Broersma教授やPaulusma博士と共同研究を行い、本研究者の二つの予想を解決した。すなわち、任意の最小次数4以上のクローフリーグラフは2因子を持つが、最小次数が5以上ならば、グラフの位数を  $n$ 、最小次数を  $\delta$  とすると、2因子の成分数の上限は  $\max\{(n-3)/(\delta-1), 1\}$  であることを示した。この上限は、本研究者が構成したグラフの族からほぼ最良であることが分かっている。また最小次数が4の場合の上限は  $\max\{(5n-14)/18, 1\}$  であることを解決した。この上限も本研究者が構成したグラフの族により、最良であることが分かっている。

(2) アメリカ・メンフィス大学を訪問し、Faudree教授らと、クローフリーグラフや線グラフにおいて2因子と独立点集合がグラフの構造に与える影響について共同研究を行い、以下のような結果を得た。すなわち、 $\alpha$ を最大独立数とすると、クローフリーグラフの最小次数が  $2n/\alpha-2$  以上で位数が  $3\alpha$

$\geq 3/2$  以上ならば、任意の最大独立点集合  $S$  に対して、全ての連結成分が  $S$  の頂点を丁度一つずつ含むような  $\alpha$  個のサイクルからなる2因子が存在する。また、線グラフの場合、以下のように主張を弱めることによって最小次数条件を最良値まで下げることに成功した。すなわち、線グラフの最小次数が7以上ならば、任意の独立点集合  $S$  に対して、 $S$  の頂点を高々1頂点含むような2因子が存在する。この最小次数条件はチェコ訪問時にRyjacek教授によって最良であることを示す例が発見されている。また以下のような興味深い予想を得た。「最小次数が  $n/\alpha$  以上ならば、適当な最大独立点集合  $S$  と  $\alpha$  個のサイクルからなる2因子が存在し、全てのサイクルが  $S$  の頂点を含む」。また、「最小次数が  $\alpha+1$  以上ならば、任意の最大独立点集合  $S$  に対して、適当な  $\alpha$  個のサイクルからなる2因子が存在し、全てのサイクルが  $S$  の頂点を含む」。これらは正しければ最良であることを示す例を発見した。

(3) 中国・北京理工大学及びチェコ・西ボヘミア大学を訪問し、Xing教授及びRyjacek教授と、グラフの閉包と2因子について共同研究を行った。Ryjacek教授はクローフリーグラフや線グラフの著名な研究者で、グラフ理論の最も有名な予想の一つであるトーマッセン予想とクローフリーグラフのハミルトン性に関する予想が、Ryjacek閉包の発見によってそれらが同値であることを証明した。共同研究ではRyjacek閉包の2因子に役立つように一般化させた2因子閉包を発見し、2因子の存在を保存することを証明した。

(4) 西ボヘミア大学訪問時、本研究者はクローフリーグラフと2因子についての講演を行った。その際(2)で述べた予想に関して、Kaiser博士が次のような質問を行った。「ハミルトンサイクルは一つの連結成分からなる2因子なので、全てのサイクルが最大独立点集合の頂点を少なくとも一つ持つように条件を変えたら最小次数条件を下げられるのではないか」。この問題提起は非常に自然であるが、一般には成り立たないことが本研究者の例からわかっている。一方、チェコからの招へい者であるKuzel博士や小関博士と本研究者による共同研究によって、連結度を仮定することによって、この問題を解決することが出来ることが発見された。すなわち、「クローフリーグラフ  $G$  の最小次数が3以上で  $k(\in \{2, 3\})$  連結ならば、任意の最大独立点集合  $S$  に対して、適当な2因子が存在し、各サイクルは  $S$  の頂点を  $k$  頂点以上含むように取れる」。このことにより、2因子の連結成分数の上限を独立数によって押さえることが出来る。すなわち、独立数は  $2n/(\delta+2)$

を越えることは出来ないので、3連結クローフリーグラフは $\alpha/2=n/(\delta+2)$ 以下の連結成分からなる2因子を持つことがわかる。この主張は、Broersma 教授らと共同研究によって得られた成分数の上限が、連結度を上げることによって改良することが出来た最初の結果である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件)

以下、全て査読有り。

1. K. Ishii, K. Ozeki and K. Yoshimoto, Set-ordered as a generalization of  $k$ -ordered, Discrete Math., to appear
2. Z. Ryjacek, L. Xing and K. Yoshimoto, Closure concept for 2-factors in claw-free graphs, Discrete Math., to appear
3. S. Chiba, Y. Egawa and K. Yoshimoto, A 2-factor in which each cycle contains a vertex in a specified stable set, Australas. J. Combin., to appear,
4. R. H. Schelp and K. Yoshimoto, An Extremal Problem Resulting in Many Paths, Ars Combin., to appear,
5. H. J. Broersma, J. Fujisawa, L. Marchal, D. Paulusma, A.N.M. Salman and K. Yoshimoto,  $\lambda$ -Backbone Colorings Along Pairwise Disjoint Stars and Matchings, Discrete Math. to appear,
6. H. J. Broersma, D. Paulusma and K. Yoshimoto, Sharp upper bounds for the minimum number of components of 2-factors in claw-free graphs, Graphs Combin. 25 (2009), 427-460
7. B. Jackson and K. Yoshimoto, Spanning Even Subgraphs of 3-edge-connected Graphs, J. Graph Theory 62 (2009), 37-47
8. K. Yoshimoto, Edge degrees and dominating cycles, Discrete Math. 308 (2008), 2594-2599,
9. Y. Egawa, H. Matsuda, T. Yamashita, K. Yoshimoto, On a spanning tree with specified leaves, Graphs Combin. 24 (2008), 13-18,

10. D. Paulusma and K. Yoshimoto, Relative length of longest paths and longest cycles in a triangle-free graph, Discrete Math. 308, 1222-1229 (2007)

11. K. Yoshimoto, On the number of components in 2-factors of claw-free graphs, Discrete Math. 307 (2007), 2808-2819,

12. B. Jackson and K. Yoshimoto, Even subgraphs of bridgeless graphs and 2-factors of line graphs, Discrete Math. 307, 2775-2785 (2007)

13. D. Paulusma and K. Yoshimoto, Cycles through specified vertices in a triangle-free graph, Discuss. Math. Graph Theory 27, 179-192 (2007),

14. H. Broersma, L. Xiong and K. Yoshimoto, Toughness and hamiltonicity in  $k$ -trees, Discrete Math. 307, 832-838 (2007),

15. J. Fujisawa, L. Xiong, K. Yoshimoto and S. Zhang, The upper bound of the number of cycles in a 2-factor of a line graph, J. Graph Theory 55, 72-82 (2007)

[学会発表] (計 14 件)

以下、発表者は全て本研究者。

1. Claw-free graphs and 2-factors that separate independent vertices, Oddeleni diskretni matematiky (University of West Bohemia, Czech, 2009/March/10)
2. On independent sets and 2-factors of claw-free graphs, 応用数学合同研究集会 (龍谷大 2008年12月17日)
3. On 2-factors of claw-free graphs, (Beijing Inst. of Tech., China, 2008/November/21)
4. On 2-factors of claw-free graphs, 5th Workshop on the Matthews-Sumner Conjecture and Related Problems (Domazlice, Czech, 2008/October/12) Invited
5. On Claw-free graphs and Cubic graphs, 日本数学会 (東工大 2008年9月24日) 特別講演
6. 2因子とハミルトンサイクルについて,

第 4 回組合せ論若手研究集会 (慶應大 2008 年 2 月 5 日) 招待講演

7. A 2-factor in which each cycle contains a vertex in a specified stable set, 応用数学合同研究集会 (龍谷大 2007 年 12 月 19 日)

8. Path cover number and Crowded cycles, 離散数学とその応用研究集会 2007 (下呂市民会館 2007 年 8 月 8 日)

9. On the number of components in 2-factors of claw-free graphs III , The Kyoto International Conference on Computational Geometry and Graph Theory (Kyoto Univ., Japan, 2007/June/12)

10.  $(S_1, \dots, S_l)$ -ordered cycles and crowded paths, Extremal Combinatorics Workshop (Renyi Institute, Budapest, Hungary, 2007/June/4)

11. On the number of components in 2-factors of claw-free graphs III , 38th Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Florida Atlantic Univ. Florida, USA, 2007/March/8)

12. On Hamilton Cycles of Graphs, Foliations and Dynamical Systems (Univ. of Tokyo, Japan, 2007/Feb/19)

13. On the number of components in 2-factors of claw-free graphs II , 応用数学合同研究集会 (龍谷大 2006 年 12 月 20 日)

14. On the Number of Components in 2-Factors of Claw-free Graphs, International Workshop on Discrete Mathematics and its Applications (Ibaraki Univ., Japan, 2006/August/3)

[その他]

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

善本 潔 (YOSHIMOTO KIYOSHI)

日本大学・理工学部・講師

研究者番号 : 90307801