

科学研究費補助金研究成果報告書

平成21年4月27日現在

研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18540156
 研究課題名（和文） 有理形写像も除外値に関する値分布理論の研究とその一意性定理等への応用
 研究課題名（英文） Value distribution theory of meromorphic mappings concerning defects and its application to uniqueness theorems.
 研究代表者
 森 正気（MORI SEIKI）
 山形大学・理学部・教授
 研究者番号：80004456

研究成果の概要：

有理形写像の除外値の値分布理論とその応用に関する基本的な問題について、いくつかの点または点の組の逆像の一致による有理形関数の一意性定理、有理形関数の特異方向の存在、角領域へ制限した条件からの一意性（集合）定理、ある微分方程式の解の性質およびその特異方向や一意性定理、有理形写像の欠除関係式などに関する、以下の本文4.で述べるような研究成果を得た。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	660,000	3,960,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析（1404）

キーワード：関数論、値分布理論、有理形写像、一意性定理、除外値、特異方向

1. 研究開始当初の背景

高次元での値分布理論で一般論は、ある程度分かっているが具体的な例はあまり知られていないように思う。研究代表者は、複素空間から複素射影空間への除外値を持たない有理形写像の定性的研究や、任意に与えられた因子（超曲面）と $[0, 1]$ 区間の値に対し、それを因子の欠除指数値にもつ

有理形写像の構成の問題を継続的に研究してきてかなり進展してきた。前者について、有理形写像の除外値の消去の問題について種々の結果を得てきた。ここでは、除外値を持たない写像の定量的研究を継続したい。後者について、Griffiths's school 他は支配的な有理形写像に対して欠除関係式を得た。そこで彼らは、定義域より像領域の

方が次元が高い場合、特に正則曲線の場合についても、ある非退化条件をつければ超曲面に対する同様の欠除関係式が成り立つのではないかという予想を出している。この問題はすでに 30 年以上経つが、Eremenko-Sodin の欠除関係式や M. Ru の欠除関係式の他はそれほど多くの進展はない。これに関連して、研究代表者は分担者の相原との共同研究で与えられた欠除指数を持つ位数 0 の有理形写像の具体的な例を作ることから始め、ある程度たくさんの例を組織的に作ることに成功した。同様のことを位数の高い有理形写像でも構成できるか、また、取りうる欠除指数の範囲の改良はできるかなどが問題となる。これらの研究により、上の予想問題にも貢献できると考えている。一方、相原の研究によれば除外値をもつ有理形写像に対しては、一意性定理が成立し易いことが分かっている。そこで、除外値の性質を利用し、一意性定理への応用も考えられる。

2. 研究の目的

この研究では、複素空間から複素射影空間への有理形写像について、次の 3 つのことを研究目的とした。

(1) 有理形写像全体の空間において、除外値をもつ写像は特別な場合を除き相対的に少ないのではないかと思われる。この希少性を何らかの方法で明らかにしたい。

(2) ネヴァンリンナの欠除指数 (f, D) について、任意に与えられた超曲面 D および、 $[0, 1]$ 内に与えられた実数 ϵ に対しその欠除指数が $(f, D) = \epsilon$ となる多様な代数的に非退化な有理形写像 f の構成を行いたい。特に今回は、位数正のものを構成したい。

(3) 有理形写像の値分布理論を写像の一意性定理や微分方程式の解の増大等の研究に応用したい。

3. 研究の方法

(1) 主要設備としては、最新の情報を入手するために複素解析および複素多様体関係の図書、講義録、論文集などを購入する。

(2) 数学の研究計画遂行にあたっては、情報交換・討論など研究交流が重要であり、他大学の研究者（関東地区、中部・近畿地区、北陸地区等）との研究連絡を行い、東

京、京都や金沢などでの研究集会に出席する。また、他大学から山形大学に招きセミナーを行う、さらに、得られた顕著な研究成果を国内の学会等や国際会議で発表する。

研究代表者の森は、当該研究課題である有理形写像の値分布理論のうち、特に、除外値の研究について中心になって研究を進める。さらに、適宜分担者との研究経過の討論 並びに連絡・調整まとめを行う。

各分担者は、各地の研究者と活発な討論・情報交換を行いながら分担課題の研究を進める。

高次元の値分布理論は、主にその専門家である研究代表者と分担者の相原が行う。

一次元の値分布理論の(角領域の場合を含む)一意性定理や微分方程式等応用は、主にその専門家である研究代表者や分担者の石崎、藤解と海外共同研究者の林偉川が担当する。林氏とは主に電子メールで討論、情報交換を行うが、場合によっては日本または中国で直接合って研究打ち合わせを行う。

分担者の河村、佐藤、水原には、有理形写像全体の集合の性質について、関数空間の性質、関数空間上の測度の研究の立場から良い測度・距離の構成に関し課題研究に協力してもらう。

4. 研究の成果

(1) 論文 [1] では、いくつかの点（あるいは点の組）の逆像の一致による有理形関数の一意性定理において、ネヴァンリンナの 4 点定理の重複度に関する条件を弱めた。さらに、点の逆像の代わりに点の組の逆像の一致による定理も与えた。条件によっては、2 つの有理形関数が一致はしないが互いにメビウス変換の関係にあることが出る。

(2) 複素平面のある方向の任意に(小さい)近傍でピカールの定理が成り立つとき、その方向をジュリア方向という。これは、一つの特異方向である。論文 [2]、[3] では同様に、特異方向に関して、任意の有理形関数とその導関数が高々 2 つの値のみ共有するような方向の存在を示した。「超位数有限な有理形関数 f は、 f と f' が高々 2 つの複素数値しか共有 (share) できないような角領域 (の方向) が存在する」という結果を得た。いくつかの点の集合の逆像の一致により一意性定理が成り立つとき、この集合を一意性集合という。論文 [4]、[5]、

では、これまでの全複素平面での条件の代わりに角領域に制限したところでの条件から一意性定理を導く集合を得た。ちなみに、角領域でのネヴァンリンナ理論も 1925 年のネヴァンリンナの論文に始まるが、全平面のときと違いいろいろ問題点がある。

一つは、 $m(r, f/f)$ に相当する $A(r, f/f)$ 等々が $A(r, f/f) = O(\log r T(r, f))$ であり、 $A(r, f/f) = O(\log r S(r, f))$ ではない。ここに $S(r, f)$ は、 $T(r, f)$ に相当する量で角領域における特性関数と呼ばれる。また、 $N(r, a)$ に相当する量の $C(r, a)$ が a 点が角領域で無限個あっても r のとき発散することが言えない。等々いろいろ問題点がある。そのほか、分担者の相原は、(1) 複素射影空間上に動標的超平面を因子として与えた場合に藤本の一意性定理・有限性定理を拡張した。(2) m 次元複素ユークリッド空間上の有限葉解析的分岐被覆空間 X とその上で定義された有理型写像 f の組 (X, f) の族に対し有限性・一意性定理を与えた。このうち(1)については M. Ru 等が同様な結果を得ている。ただし上記(1)の結果はより一般化されている。また、(3) ネヴァンリンナの欠除指数を射影的代数多様体上の線形系の関数として研究し、落合や Nochka (未発表) の論文のアイデアに基づいたもので、解析的接続層に関する値分布の概念を用いて H. Wu が指摘していた落合の欠除関係式における e_0 の意味を与えた。(論文 および改良版を投稿準備中)。分担者の藤解は論文 で、林との共同研究でネヴァンリンナの 5 点定理は、一方の関数が Painleve 方程式の解ならば 4 点で良いことを示した。分担者の石崎は論文 で、微分方程式の超越有理形関数解に関する Malmquist の定理の改良を行った。また、論文 で Schly"oder 方程式の任意の超越有理形関数解は任意の方向を Borel 方向として持つ、など Borel 方向、Julia 方向の研究をした。分担者の佐藤と水原はローレンツ空間におけるハンケル変換、一般化 Morrey 空間上の特異積分作用素とその交換子の研究、および重み付き Hardy 作用素に関連する重み関数の研究を行いそれぞれ(論文 、)の結果を得た。河村はバナッハ格子上的有界線形作用素の AM -または AM -空間におけるカオスの写像等の研究をし(論文 、 、)などの結果を得た。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計15件)

Lin Wei-chuan, Mori Seiki and Yi Hong-xun, Uniqueness theorems of entire functions with shared-set in an angular domain. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 24 (2008), no. 11, 1925-1934.(査読有り)

Han Qi, Mori Seiki and Tohge Kazuya, On results of H. Ueda and G. Brosch concerning the unicity of meromorphic functions. J. Math. Anal. Appl. 335 (2007), no. 2, 915-934. (査読有り)

Aihara Yoshihiro, Deficiencies of holomorphic curves in complex projective spaces. Complex analysis and its applications, 119-124, OCAMI Stud., 2, Osaka Munic. Univ. Press, Osaka, 2007. (査読有り)

Ishizaki Katsuya and Toda Nobushige, Transcendental meromorphic solutions of some algebraic differential equations. J. Aust. Math. Soc. 83 (2007), no. 2, 157-180. (査読有り)

Lin Weichuan and Tohge Kazuya, On shared-value properties of Painlevé transcendents. Comput. Methods Funct. Theory 7 (2007), no. 2, 477-499.(査読有り)

Tohge Kazuya, Remarks on a special fundamental solution base and its product. Complex analysis and its applications, 351-356, OCAMI Stud., 2, Osaka Munic. Univ. Press, Osaka, 2007.(査読有り)

Kawamura Shinzo and Wang, Hongqing, Strange topological conjugacies between two tent maps. Far East J. Dyn. Syst. 9 (2007), no. 1, 17-44. (査読有り)

Lin Weichuan and Mori Seiki, On one new singular direction of meromorphic functions. Complex Var. Elliptic Equ. 51 (2006), no. 4, 295-302.(査読有り)

Lin Weichuan, Mori Seiki and Tohge Kazuya, Uniqueness theorems in an angular domain. Tohoku Math. J. (2) 58 (2006), no. 4, 509-527.(査読有り)

Ishizaki Katsuya and Yanagihara Niro, Singular directions of meromorphic solutions of some non-autonomous Schröder equations. Potential theory in Matsue, 155-166, Adv. Stud. Pure Math., 44, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.(査読有り)

Ishizaki K and Yanagihara N., Borel and Julia directions of meromorphic Schröder functions. II. Arch. Math. (Basel) 87 (2006), no. 2, 172--178. (査読有り)

Komori Yasuo and Mizuhara Takahiro, Factorization of functions in $H^1(\mathbb{R}^n)$ and generalized Morrey spaces. Math. Nachr. 279 (2006), no. 5-6, 619--624. (査読有り)

Ahmed Payer and Kawamura Shinzo, Chaotic homeomorphisms of compact subspaces of the real line. Bull. Yamagata Univ. Natur. Sci. 16 (2007), no. 4, 127-133. (査読有り)

Ahmed Payer, Kawamura Shinzo and Sasaki, Shingo Banach lattices and the Perron-Frobenius operator associated with chaotic map. Far East J. Dyn. Syst. 8 (2006), no. 1, 1-25. (査読有り)

Sato Enji, A generalization of the Hankel transform and the Lorentz multipliers. Tokyo J. Math. 29 (2006), no. 1, 147-166.(査読有り)

[学会発表](計13件)

Aihara Yoshihiro, Deficiencies of holomorphic curves for linear systems, 等角写像論・値分布論合同研究集会, 2008.11.30, 金沢大学サテライト・プラザ

Ishizaki Katsuya, On factorization of meromorphic solutions of some functional equations 等角写像論・値分布論合同研究集会, 2008.11.29 金沢大学サテライト・プラザ

Mori Seiki, Introduction to Nevanlinna theory and its applications, International Seminar on real and complex analysis in higher dimensional spaces, 2008.1.8, Yamagata University.

Ishizaki Katsuya, Difference operator and value distribution theory, 2007.12.9, 慶応大学理工学部

Tohge Kazuya, Remarks on a special fundamental solution base and its products, 15th-International Conference Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2007.8.2, 大阪市立大学

Aihara Yoshihiro, Deficiencies of Holomorphic Curves for Hypersurfaces in Complex Projective Spaces, 15 th-International Conference Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2007.7.30, 大阪市立大学

Mori Seiki, Topics on meromorphic mappings and defects, Workshop on value distribution theory and its applications, 2007.7.23-29, Weihai International Center of Shandong University (山東大学国際交流中心)

Mori Seiki, Meromorphic mappings and deficiencies, International Seminar at Fujian Normal University, 2007.7. 19-22, 福建師範大学

Tohge Kazuya, A special fundamental solutions base and its products, 日本数学会年会, 2007.3.29, 埼玉大学

Tohge Kazuya, A problem on the product and the Wronskian of meromorphic functions and its application to linear differential equations, 等角写像論・値分布論合同研究集会, 2006.12.2, 広島大学学生会館

Ishizaki Katsuya, q-difference properties of meromorphic functions, 等角写像論・値分布論合同研究集会, 2006.12.2, 広島大学学生会館

Ishizaki Katsuya, A Valiron-Mokhonko type result for an entire function of small growth and its applications, 日本数学会秋季総合分科会, 2006.9.19, 大阪市立大学

Aihara Yoshihiro, Uniqueness problem of meromorphic mappings into complex projective spaces for moving targets, Workshop on Holomorphic Foliations and Holomorphic Curves, 2006.5.26, 東京大学玉原セミナーハウス

6 . 研究組織

(1)研究代表者

森 正気 (MORI SEIKI)
山形大学・理学部・教授
研究者番号：80004456

(2)研究分担者 (2006, 2007年度)

相原義弘(AIHARA YOSHIHIRO)
沼津工業高等専門学校・教授
研究者番号：60175718
石崎克也(ISHIZAKI KATSUYA)
日本工業大学・工学部・助教授
研究者番号：60202991
藤解和也(TOHGE KAZUYA)
金沢大学・大学院自然科学研究科・
助教授
研究者番号：30260558
佐藤圓治(SATO ENJI)
山形大学・理学部・教授
研究者番号：80107177
河村新蔵(KAWAMURA SHINZO)
山形大学・理学部・教授
研究者番号：50007176
水原昂廣(MIZUHARA TAKAHIRO)
山形大学・理学部・教授
研究者番号：80006577

(3)連携研究者 (2008年度)

相原義弘(AIHARA YOSHIHIRO)
沼津工業高等専門学校・教授
研究者番号：60175718
石崎克也(ISHIZAKI KATSUYA)
日本工業大学・工学部・教授
研究者番号：60202991
藤解和也(TOHGE KAZUYA)
金沢大学・理工研究域電子情報学系・
准教授
研究者番号：30260558
佐藤圓治(SATO ENJI)
山形大学・理学部・教授
研究者番号：80107177
河村新蔵(KAWAMURA SHINZO)
山形大学・理学部・教授
研究者番号：50007176
水原昂廣(MIZUHARA TAKAHIRO)
山形大学・理学部・教授
研究者番号：80006577