

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2008

課題番号：18540160

研究課題名（和文）探針法および囲い込み法のさらなる展開

研究課題名（英文）Further development of the probe and enclosure methods

研究代表者

池島 優（IKEHATA MASARU）

群馬大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：90202910

研究成果の概要： 偏微分方程式に対する境界値逆問題あるいは逆散乱問題として定式化される、媒質中の不連続性についての情報を、さまざまな物理量からなる観測データから抽出する問題について、研究代表者が過去に発見した二つの基本的な方法である探針法と囲い込み法のさらなる展開を目指して研究した。その結果弾性体の方程式、熱方程式、Laplace 方程式、Helmholtz 方程式等で記述される境界値逆問題において、長い間懸案となっていた問題についての解決を得た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,000,000	0	1,000,000
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	540,000	3,340,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：境界値逆問題、Laplace 方程式、Helmholtz 方程式、熱方程式、弾性体の方程式、空洞、亀裂、非破壊検査

1. 研究開始当初の背景

媒質中の亀裂、介在物、障害物、空洞あるいは源泉などの不連続性についての情報をさまざまな物理量からなる観測データから抽出する問題は逆問題の典型例である。

これらは、支配方程式と呼ばれる偏微分方程式に対する境界値逆問題あるいは逆散乱問題として定式化される。研究代表者は、これらの問題に対する二つの基本的な方法を発見している。

ひとつは、与えられた媒質内を仮想的な針で探り、その針が最初に当たる不連続性の位置や形についての情報を、観測データの数学モデルである Dirichlet-Neumann 写像から抽出する方法で探針法 (probe method) と呼ばれる方法である。もう一つは、無限遠から仮想的な平面を下降させそれが最初に当たる不連続性の位置や形についての情報を Dirichlet-Neumann 写像あるいはその一部から抽出する方法で囲い込み法 (enclosure

method)と呼ばれる方法である。

研究代表者は、この二つの方法をいくつかの具体的な逆問題に適用し、不連続性の情報の抽出公式を確立するとともに探針法を再考し、探針法には次の二つの側面(A面とB面)があることをあきらかにした：

(A面) 不連続性のところで初めて無限大になる指示関数(indicator function)と呼ばれるfieldを、媒質の境界から出発して、観測データの数学モデルであるDirichlet-Neumann写像からいかに計算するかという、fieldの接続という面である。計算されたfieldを見ることにより、不連続性の存在する場所、形状を抽出する；

(B面) 針が不連続性を貫通する前後の、Dirichlet-Neumann写像から計算される、指示列(indicator sequence)と呼ばれる数列の挙動の違いから、不連続性の存在する場所や形状を抽出する。

研究代表者は、この探針法再考プロジェクトをさらにすすめ、Laplace方程式を支配方程式とする亀裂の逆問題や、Helmholtz方程式を支配方程式とする、Robin境界条件を持つ障害物に対する逆問題において、ここでいうところのA面の確立に、従来より単純なエネルギー不等式のみを用いる方法をもたらすとともに、カヴァーされていなかったB面についての知見も得た。

ただし支配方程式がHelmholtz方程式の場合には、B面については波数が小さいという制限がついていて、これは針列の挙動についてのもっと踏み込んだ知識が不足していることにその一因がある。

次に囲い込み法であるが、その適用範囲も拡大しつつあった。電気インピーダンストモグラフィに関わる境界値逆問題から出発し、空間二次元において、固定した波数、入射方向(高々2個の一次独立な方向)に対するFar field patternからの、未知の多角形状の音響的に硬い物体や折れ線状の薄い物体の凸包を、一回の極限操作で抽出する公式を確立した。また視野が限定されているときも、座標の原点と物体との位置関係に関する先験情報を取り入れることにより、対応す

る極めて単純な公式を得た。これは先験情報の逆問題において果たす役割を鮮明に示した。さらに、音速は障害物の内部と外部で同じ一定の値をとるが、密度は内部と外部で異なる一定値をとるというtransmissionの問題においても囲い込み法は適用できることもわかった。これらは複素指数関数解を使っているが、電気インピーダンストモグラフィに関わる境界値逆問題において、Mittag-Lefflerの関数を利用して、介在物の形状と位置についての情報をDirichlet-Neumann写像から抽出する方法を導入し、それに基礎をおくアルゴリズムの提唱と数値実験を、Samuli Siltanen(Finland)と行った。

さらに、研究代表者は、異なる導電率をもつ、厚みをもつ材料が、いくつか重なってできた材料の、層と層の間に発生した亀裂の凸包を、対応するDirichlet-Neumann写像のグラフ上の一点から抽出する公式を、空間二次元において確立し、この公式を基礎におくアルゴリズムの数値実験を大江貴司の協力でした。

2. 研究の目的

本研究の目的は、逆問題における不連続性のどんな情報が、どのように、観測データから決定されるのかを明示する公式の確立、その公式を基礎にしたそれら情報の抽出のためのアルゴリズムの構成と数値実験の二つであるが、研究開始当初における背景を踏まえ、探針法と囲い込み法のさらなる展開を目指し、次の7点の具体的な目的を設定した。

(1) 亀裂による、音波の散乱の逆問題への探針法の応用であるが、A面については問題はない。そこでB面についてどうなるか、さらには弾性波についてはどうなるかをあきらかにする。

(2) 音速が障害物の内部と外部で異なる場合における音波の散乱の逆問題への囲い込み法の適用。

(3) Vekua変換のアイデアを使って、Mittag-Lefflerの関数と同じような無限遠での漸近挙動をするHelmholtz方程式の特殊解を構成し、障害物による音波の散乱の逆問題において囲い込み法の一般化を確立し、それを基礎にしたアルゴリズムの構成と数値実験。

(4)Laplace 方程式を支配方程式とする境界値逆問題において、Mittag-Leffler の関数を使った、一個の観測データを用いた囲い込み法における指示関数の漸近挙動をあきらかにする。

(5)探針法および囲い込み法は楕円型方程式にたいしてのみ適用されてきたが、熱方程式(拡散方程式)に対する逆問題への適用は、その応用の可能性と数学的な興味から見て、検討に値する。今回は特に熱方程式に対する逆源泉問題への囲い込み法から出発する。

(6)弾性体中に発生した亀裂や空洞の凸包の有限個の観測データを用いた囲い込み法による抽出公式の確立。

(7)有限個の観測データを用いた囲い込み法の、三次元における亀裂や空洞の情報の抽出問題への適用。

3. 研究の方法

ひたすら考察を重ね、証明を完成させるのが基本であるが、連携研究者や研究分担者との研究討論、またさまざまな研究集会に参加して偏微分方程式についての最新の知見に触れることや他の研究者との交流、さらには資料収集し過去の結果を検討した。

4. 研究成果

(1)解の一組の Cauchy データを使った囲い込み法の弾性体における空洞、介在物あるいは亀裂などの不連続性の存在する場所や形状を抽出する問題は支配方程式が連立であることや特異点での解の挙動が複雑であることから長い間懸案であった。今回対応する二次元の問題を考え、まず最初に亀裂が線状でその端点のひとつが弾性体表面における既知の点であるという仮定のもとで、もう一つの未知の端点を、表面における‘うまく制御された’応力と対応する変位の一組から決定する公式を確立した。

証明は、囲い込み法のアイデアにもとづき、次の三つにわけられる。まず解の亀裂先端での、その特異性をあらかず展開公式の厳密な収束証明を与えた。その本質は、亀裂先端の近傍を変換した領域で、Airy の応力関数を Muskhelishvili の議論を用いて解析接続したとき、先端に

対応する点が除去可能特異点になっていることであることが分かった。次に弾性体の方程式の複素指数関数解とデータから大きな独立変数の指示関数を構成し、指示関数の変数無限大における完全漸近展開公式を、解の展開公式を使って確立した。最後にその完全漸近展開公式を使って、応力拡大係数が消えないという条件を導入するかわりにより緩い条件である‘うまく制御された’応力を表面から加えると、指示関数が変数無限大のとき真に代数的減衰をすることを証明した。さらに未知の亀裂とは独立に与えることができる‘うまく制御された’応力の例を与えた。これは、どのような力を表面に与えれば、亀裂の情報を抽出できるか、という問いにたいするひとつの解答であると考えられる。

さらに、弾性体が均質ではあるが非等方である場合へ、その結果を拡張した。

そしてさらには、表面における応力と対応する変位の一組から弾性体中に発生した空洞の存在する場所や形状を抽出する問題に取り組み、空洞が多角形状である場合、その支持関数を抽出する公式を確立した。Mellin 変換を使って、多角形の頂点の近傍における解の展開の収束証明を与えた点が核心部分であるが、その解の挙動は、Laplace 方程式の場合における囲い込み法の応用と比較して、結果に決定的違いをもたらすことがわかった。

介在物の場合や、弾性波を使った場合については今後の課題である。

(2)長年の懸案だった、針列の具体的な閉じた形での構成という探針法についての基本的問題に対して、支配方程式が Laplace 方程式または Helmholtz 方程式で針が線分で与えられる場合に、簡潔な解答を与えた。

簡単に言うと、Yarmukhamedov が 1972 年に発表した Laplace 方程式に対する特別な基本解の正則部分から Laplace 方程式に対する針列が構成され、さらにその Vekua 変換をとると Helmholtz 方程式に対する針列が生成されるということである。この結果により、支配方程式が Laplace 方程式または Helmholtz 方程式で、線分状の針を用いる限り、探針法は完全に陽な方法となった。また、この針列は針上

の各点で爆発しているという、従来よりも踏み込んだ知見を得た。

この針列を使って、逆散乱問題における探針法の B 面における波数の小ささの制限をはずすことは、今後の興味ある課題である。

(3) Mittag-Leffler 関数を使った囲い込み法と探針法の亀裂の逆問題への応用のアイデアを適用して、電気インピーダンストモグラフィにかかわる、Laplace 方程式を支配方程式とする逆問題における亀裂の可視部の情報をもたらす陽な方法を提唱するとともに、その数値実験を実行し、その有効性と限界を検証した。

この方法の、Helmholtz 方程式を支配方程式とする逆散乱問題への拡張は、今後の課題である。

(4) 熱伝導体中の未知の介在物、あるいは中に発生した、腐食による空洞、亀裂の場所や形についての情報を物体表面における有限観測時間における温度および熱流束の有限個の組から抽出する逆問題は、基本的で重要な逆問題である。

この問題をまず空間一次元の場合について考察し、逆向き熱方程式に対する、大きなパラメータを持つ実および複素指数関数解を用いて、囲い込み法のアイデアにより、それらの情報の抽出公式を確立した。

次にこの問題を空間二、三次元の場合に考察し、逆向き熱方程式の、大きなパラメータを持つ実の指数関数解を使って、空洞の凸包等の情報を抽出する公式を得た。その証明は、意外にも極めて簡明で、空間一次元の場合の結果の、空間二、三次元への拡張になっている。有限観測時間におけるデータを使っているということと、大きなパラメータに依存した、陽な熱流束を物体表面に与え、対応する表面温度分布からある量を計算すると、それが空洞の支持関数等の情報を与えるというこの方法の汎用性は大きく、時間に依存したデータを扱う他のさまざまな逆問題への展開が期待される。

(5) 熱伝導体の表面の一部における有限観測時間における温度および熱流束の組から、その表面からできるだけ離れた、内部の指定した点における温度の時間発展についての情報を抽出する問題は、応

用上重要な典型的な逆問題である。今回は、支配方程式が熱方程式に帰着される場合においてこの問題を考察し、囲い込み法の考え方による具体的な抽出公式を確立した。その核心は、逆向き熱方程式の通常の基本解とは異なる、大きなパラメータを持った特別な基本解を構成しパラメータを無限大にしたときの挙動を調べることでなされた。副産物として熱方程式に対する Carleman 型の公式も得られたが、これは Laplace 方程式の場合の Yaemukhamedov の結果の熱方程式版になっている。

(6) 背景となる物体の導電率が未知である場合、囲い込み法がなお有効であるかという問題は数学上興味ある問題である。なぜなら、単に一意性を証明しようとしても、Cauchy 問題の解の一意性に訴える従来の論法では、その最初の段階においてすでに破綻するからである。

この問題の二次元版を、背景となる物体の導電率が未知ではあるが、均質かつ等方という仮定のもとで考察した。

その結果、物体が楕円の形をした領域である場合、その境界上の一組の電位および電流密度から、物体内の多角形状の空洞とその楕円の二つの焦点をあわせたものの凸包の情報を抽出できることがわかった。これは背景となる物体の導電率が未知である場合、空洞を囲む領域の形状が囲い込み法によって見える部分に影響をあたえる、ということの例証になっていると考えられる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

① Ikehata, M. & Kawashita, M.,

The enclosure method for the heat equation, Inverse Problems, in press, 査読有

② Ikehata, M., Two analytical formulae of the temperature inside a body by using partial lateral and initial data, Inverse Problems, 25, 035011 (21pp), 2009, 査読有

③ Ikehata, M. & Itou, H., Enclosure method

and reconstruction of a linear crack in an elastic body, J. Phys. : Conf. Ser. , 135, 012052(8pp)、2008、査読有

- ④ Ikehata, M.、 A remark on the enclosure method for a body with an unknown homogeneous background conductivity, Cubo A Mathematical Journal、 10、 No2、 31-45、 2008、 査読有、
- ⑤ Ikehata, M. & Itou, H.、 An inverse problem for a linear crack in an anisotropic elastic body and the enclosure method, Inverse Problems、 24、 025005 (21pp)、 2008、 査読有
- ⑥ Ikehata, M. & Ohe, T.、 The enclosure method for an inverse crack problem and the Mittag- Leffler function, Inverse Problems、 24、 015006(27pp)、 2008、 査読有
- ⑦ Ikehata, M.、 Probe method and a Carleman function, Inverse Problems、 23、 1871-1894、 2007、 査読有
- ⑧ Ikehata, M.、 Virtual signal in the heat equation and the enclosure method Inverse Problems in Applied Sciences -towards breakthrough- 、 J. Phys. :Conf. Ser. 、 73、 012010(14pp)、 2007、 査読有
- ⑨ Ikehata, M.、 Extracting discontinuity in a heat conductive body. One- space dimensional case, Applicable Analysis、 86、 963-1005、 2007、 査読有
- ⑩ Ikehata, M. & Itou, H.、 Reconstruction of a linear crack in an isotropic elastic body from a single set of measured data, Inverse Problems、 23、 589-607、 2007、 査読有

[学会発表] (計 12 件)

- ① 池島優、伊藤弘道、 On reconstruction of an unknown cavity in an isotropic elastic body with one measurement、 日本数学会 2009 年度春の年会、 2009. 3. 27、 東京
- ② 池島優、 The enclosure method and extracting unknown discontinuity from dynamical data、 望月先生退職

記念研究集会、 2009. 3. 18、 東京

- ③ 池島優、 逆問題における不連続性の抽出のための解析的方法 -探針法 10 年- 、 Encounter with Mathematics 第 48 回微分方程式に対する逆問題-既知と未知が逆転したときに何が視えるか?、 2008. 11. 21、 東京
- ④ Ikehata, M. & Itou, H.、 Enclosure method and reconstruction of a linear crack in an elastic body、 6th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice(ICIPE2008)、 2008. 6. 19、 Paris, France、
- ⑤ Ikehata, M.、 An inverse problem for the heat equation and the enclosure Method、 第 8 回松山解析セミナー、 2008. 2. 13、 愛媛
- ⑥ Ikehata, M. & Itou, H.、 On inverse crack problems in elastostatics、 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics、 2007. 7. 16、 Switzerland、
- ⑦ 池島優、 Probe method and a Carleman function、 数理科学セミナー、 2007. 2. 10、 茨城
- ⑧ Ikehata, M.、 Virtual signal in the heat equation and the enclosure method、 Symposium on Inverse Problems Honoring Alberto Calderón, IMPA、 2007. 1. 15-19、 Rio de Janeiro, Brazil
- ⑨ 池島優、 指数関数と偏微分方程式に対する逆問題、 愛媛大学数学談話会、 2006. 9. 27、 愛媛
- ⑩ 池島優、 Travel time, heat equation and extracting discontinuity、 数理科学セミナー、 2006. 9. 8-10、 茨城
- ⑪ Ikehata, M.、 An inverse source problem for the heat equation and the enclosure method、 Inverse Problems in Applied Sciences-towards breakthrough-、 2006. 7. 3-7、 北海道
- ⑫ 池島優、 Travel time and heat equation、 中央大学偏微分方程式セミナー、 2006. 6. 21、 東京

[その他]

ホームページ等

<http://math.dept.eng.gunma-u.ac.jp/~ikehata/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

池島 優 (IKEHATA MASARU)

群馬大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：90202910

(2) 研究分担者

田沼 一実 (TANUMA KAZUMI)

群馬大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：60217156

(期間：平成 18 年度～平成 19 年度)

天野 一男 (AMANO KAZUO)

群馬大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：90137795

(期間：平成 18 年度～平成 19 年度)

大江 貴司 (OHE TAKASHI)

岡山理科大学・理学部・准教授

研究者番号：90258210

(期間：平成 18 年度～平成 19 年度)

伊藤 弘道 (ITOU HIROMICHI)

群馬大学・大学院工学研究科・助教

研究者番号：30400790

(期間：平成 18 年度～平成 20 年度)

(3) 連携研究者

田沼 一実 (TANUMA KAZUMI)

群馬大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：60217156

(平成 20 年度)

天野 一男 (AMANO KAZUO)

群馬大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：90137795

(平成 20 年度)

大江 貴司 (OHE TAKASHI)

岡山理科大学・理学部・准教授

研究者番号：90258210

(平成 20 年度)