

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540167

研究課題名(和文) 合成作用素とスペクトル保存写像の研究

研究課題名(英文) Studies on composition operators and spectrum-preserving maps

研究代表者

高木 啓行 (TAKAGI HIROYUKI)

信州大学・理学部・教授

研究者番号：20206725

研究成果の概要：合成作用素の従来の研究をもとに、スペクトル保存写像と合成作用素の関連を調べた。そして、単位的な半単純可換バナッハ環の間で、乗法的にスペクトルを保存する全射の写像が、合成作用素に似た形で表現できることを証明した。さらに、末梢スペクトルの保存でも同様の結果を導いた。これらは、バナッハ環の保存問題への部分解答である。また、バナッハ空間上のシフト作用素の研究や、ハイヤーズ・ウラム安定性の応用面の開拓なども行った。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	600,000	0	600,000
2007年度	600,000	180,000	780,000
2008年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	1,800,000	360,000	2,160,000

研究分野：函数解析学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：合成作用素, 関数環, バナッハ環, スペクトル, 保存問題, シフト作用素.

1. 研究開始当初の背景

「合成作用素(composition operator)」の研究は、1960年代後半の E. A. Nordgren や H. J. Schwartz らの結果に始まり、それ以降、世界的に広まった。とくに、1990年代以降の発展が目覚ましい。その研究の目的は、様々な関数空間(ハーディ空間・バーグマン空間・ルベグ空間・関数環など)において、合成作用素 $C_\phi: f \rightarrow f \circ \phi$ の「作用素としての性質」を調べることである。これは、合成と

いう演算の性質を調べることで、素朴な動機に基いている。とはいっても、関数空間自体に合成という演算がなじみにくい傾向があり、いくつかの難点が未解決問題になっている。これらは、多くの研究者の興味の的になり、活発に研究されてきた。高木(研究代表者)も同じく、いくつかの関数空間や関数環において、合成作用素の性質(とくに、有界性・コンパクト性・フレドホルム性・スペクトルなど)を調べてきた。

そのような研究の中で、合成作用素の「作

用素としての性質」以前に、「その形もたらず結果(保存性)」に面白さを感じてきた。いろいろな関数空間において、合成作用素は、和・スカラー積の他に、積・値域・スペクトルなどを保存するのである。振り返ると、次のような周知の事実があった。

- (1) 2つの関数環の間で、和・スカラー積・積を保存する全射の写像(準同型写像)は、合成作用素を用いて表現できる。
- (2) 様々な関数空間の間で、和・スカラー積・ノルムを保存する全射の写像(等長作用素)は、荷重合成作用素の形をとる。
- (3) 2つの関数環の間で、和・積を保存する全射の写像(環準同型写像)が、合成作用素を用いて表現できる。

これらの事実が発見された頃は、合成作用素の研究が広まっておらず、事実自体「合成作用素」という言葉を用いずに語られていた。つまり、合成作用素を意識していなかったのである。しかし、合成作用素の研究がすすんだ今、この種の研究に、新たな観点が生まれたいか、という思いがくすぶっていた。

そんな中の2002年、L. Molnarが、次の定理を証明した：

定理： 第一可算公理を満たすコンパクト・ハウストルフ空間 X 上の連続関数環 $C(X)$ の間で、乗法的にスペクトルを保存する全射の写像は、合成作用素を用いて表現できる。

この定理のような「スペクトル保存写像」の研究は、「バナッハ環の保存問題」と関連し、非常に重要な話題である。この結果に触発され、以前からくすぶっていた前述の動機が、強まってきた。こうした経緯から、今回の研究課題「合成作用素とスペクトル保存問題の研究」を始めるに至った。

2. 研究の目的

「保存問題」の歴史は古く、バナッハ環の研究が始まった頃には、次のような問題が自然に発せられた。

保存問題： 2つのバナッハ環の間の写像が、ある性質を保存するとき、他の性質が自動的に保存されるだろうか？

この問題は、具体的にいくつもの設定ができ、それぞれに重要な問題になる。前項で述べたL. Molnarの結果は、そのひとつの解答である。高木は、これを「合成作用素」という観点から見て、発展の予感がした。そして、その予感から、「保存問題」に新しい視点が出てきたと確信した。つまり、

「合成作用素」という観点を通して、

「保存問題」を解決していこう

というのである。これが、この研究課題の目的である。

この研究課題では、合成作用素の従来の研究によって蓄積された成果や技術が活かされる。そのため、合成作用素の研究の発展も目的に含めている。新たな視点によって、「合成作用素の研究」と「保存問題の研究」の両方に、進展をもたらすことをねらっている。

また、近辺分野の研究者との情報交換や打合せにより、関数環論やバナッハ環論の研究の発展につながることも視野に入れている。

3. 研究の方法

この研究は、連続関数環 $C(X)$ に関するL. Molnarの結果が端緒になっているが、その根底にバナッハ環の保存問題を意識しているので、関数環論やバナッハ環論の舞台にのるとくに、関数環論では、尖点やChoquet境界の理論、また、バナッハ環論では、それらの拡張方法など、必須の調査事項がたくさんある。これらの内容は、数学の多くの分野と共有部分を持ち、様々なアイデアが盛り込まれるので、関連分野で活躍する専門家の知識や技量を活かすことが必要になる。必然的に、この研究は共同研究の形をとる。

そこで、次のメンバーによる共同研究の体制をとった。それが、もっとも有効と考えたからである。

- (1) 高木啓行(代表者)：これまでに行ってきた「合成作用素」の研究の成果や技術を活かし、この研究課題に臨む。
- (2) 高橋眞映(分担者)：高木は、これまでに、Hyers-Ulam安定性問題やHua型不等式の研究などで、高橋氏と共同研究をすすめてきた。高橋-高木の共同研究体制は準備万全である。この研究課題では、高橋氏のバナッハ環の研究経歴を活かした。
- (3) 三浦毅(山形大・理工)：高橋氏のいる山形大には三浦毅氏がいて、私の研究仲間である。三浦氏は、環準同型写像に精通していて、その知識がこの研究課題に直接結びつく。
- (4) 羽鳥理(新潟大・理)：羽鳥氏は、高橋氏の研究仲間であり、高木の先輩である。この研究課題は、羽鳥氏なしではすすめられない面が多く、実際に成果を上げるのに、重要な役割を担ってくれた。

以上のような役割分担で、この研究課題の研究をすすめた。それぞれに不可欠な役割を果たし、おのおのの研究分野においても、同時に発展が見られた。そのうち、高木・高橋に関するものは、この研究課題の範疇である。

以上の4名は、いろいろな会合で出会っては、研究打合せを行った。また、次のような研究集会を開催し、参加者との討論で多くのものを得た。

「米沢数学セミナー」：2006年7月，2007年7月，2008年7月，以上，山形大・工（高橋・三浦主催）。

「関数環研究集会」：2006年12月，岩手医科大（羽鳥・飯田安保氏主催），2007年11月，信州大・理（高木主催），2008年11月，山形大・工（高木・三浦主催）。

「つくばセミナー」：2006年11月，2007年11月，2009年3月，以上，筑波大学（川村一宏氏主催/高橋・羽鳥・三浦・高木が協力）

4. 研究成果

まず，前述の L. Molnar の結果の一般化を行った。実際は，「定義域 X が第一可算公理を満たすこと」や「連続関数環 $C(X)$ に限ること」などを一般化し，「関数環」という設定で，同様の定理を得た。正確に述べると，次のとおりである。

定理：2つの関数環の間で，乗法的に値域を保存する全射の写像は，合成作用素を用いて表現できる。

われわれとは独立に，Rao and Roy は，乗法的にスペクトルを保存する写像について，同様の結果を導いた。しかし，われわれの結果は，それを含むものである。Rao and Roy は，その後，末梢スペクトルの保存などにも触れているので，われわれもそれに倣って，同様の結果を研究した。

次に，関数環を一般のバナッハ環に拡張する試みをした。上の定理では，関数環の道具（とくに，尖点や Choquet 境界など）が重要な役割を果たすので，それをそのままバナッハ環の設定に移すことはできない。そこで，単位的な半単純可換バナッハ環において，われわれの方法を活かすことを考えた。その結果は，次のように述べられる。

定理：2つの単位的な半単純バナッハ環の間で，乗法的にスペクトルを保存する全射の写像は，準同型写像を用いて表現できる。

さらに，われわれは，これらの結果の吟味も行った。実際，上記の定理の「全射」の仮定が決定的で，この条件が落とせない反例をあげた。また，「乗法的なスペクトル保存」を，「加法的なスペクトル保存」「乗法的にスペクトル縮小」などに変更した場合の考察も行った。

また，われわれは，バナッハ環の保存問題を意識しているので，関連して，2-局所同型写像や2-局所等長作用素の結果も得た。実際，2つの関数環の間の2-局所同型写像や2-局所等長作用素は，全射のとき，合成作用素を用いて表現できることを証明した。以上が，今回の主要結果である。

これらに関連した研究は，他の多くの研究者たちによっても行われ，この研究課題の期間中に，L. Molnar による専門書「Selected Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces」(Springer, 2007) が出版された。このことからわかるように，この研究課題は，現在，注目を浴びている話題のひとつである。

以上の研究の副産物として，合成作用素の研究もすすんだ。ひとつは，シフト作用素に関するもの，もうひとつは，スラント・テープリッツ作用素に関するものである。ともに，高木とその院生との共同研究で，新結果がいくつか得られた。これらは，正式に論文はしていないが，口頭発表により公表している。

また，さらなる副産物として，高橋氏と以前から行ってきた Hyers-Ulam 安定性の話題や，Hua 型不等式の応用面で，新しい発見があった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計17件) (すべて査読有り)

(高木啓行)

[1] T. Miura, H. Takagi, M. Tsukada and S.-E. Takahasi, Superstability of generalized multiplicative functionals, to appear in J. Inequal. Appl.

[2] O. Hatori, T. Miura, H. Oka and H. Takagi, Peripheral multiplicativity of maps on uniformly closed algebras of continuous functions which vanish at infinity, to appear in Tokyo J. Math.

[3] S.-E. Takahasi, H. Oka, T. Miura, H. Takagi, A Cauchy-Euler type factorization of operators, Tokyo J. Math. 31 (2008), 489-493.

[4] T. Miura, H. Takagi, S.-E. Takahasi, A generalization of Wang's inequality, Applied Functional Analysis, Yokohama Publ. 2007, 203-210.

[5] O. Hatori, T. Miura, H. Oka and H. Takagi, 2-local isometries and 2-local automorphisms on uniform algebras, Int. Math. Forum 2 (2007), 2491-2502.

[6] S.-E. Takahasi, T. Miura, H. Takagi, Exponential type functional equation and

its Hyers-Ulam stability, J. Math. Anal. Appl. 329 (2007), 1191-1203.

[7] O.Hatori, T. Miura and H. Takagi, Unital and multiplicatively spectrum-preserving surjections between semi-simple commutative Banach algebras are linear and multiplicative, J. Math. Anal. Appl. 326 (2007), 281-296.

[8] J.-I. Fujii, M. Fujii, T. Miura, H. Takagi and S.-E. Takahasi, Continuously differentiable means, J. Inequal. Appl. 2006, 15pp.

[9] H. takagi, T. Miura, T. Hayata and S.-E. Takahasi, A reconsideration of Hua's inequality II, J. Inequal. Appl. 2006, 8pp.

[10] O.Hatori, T. Miura and H. Takagi, Characterizations of isometric isomorphisms between uniform algebras via nonlinear range-preserving properties, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 2923-2930.

(高橋眞映) 主なもの

[11] T. Miura, A. Uchiyama, H. Oka, G. Hirasawa and S.-E. Takahasi, A perturbations of normal operators on Hilbert Space, Nonlinear Funct. Anal. Appl. 13 (2008), 291-297.

[12] T. Miura, S.-E. Takahasi, N. Niwa and H. Oka, On surjective ring homomorphisms between semi-simple commutative Banach algebras, Publ. Math. Debrecen 73 (2008), 119-131.

[13] T. Miura, H. Oka, G. Hirasawa and S.-E. Takahasi, Superstability of multipliers and ring homomorphisms on Banach algebras, Banach J. Math. Anal. 1 (2007), 125-135.

[14] S.-E. Takahasi, T. Miura and T. Hayata, On Wirtinger's inequality and its elementary proof, Math. Inequal. Appl. 10 (2007), 311-319.

[15] J. Inoue and S.-E. Takahasi, On characterizations of the image of the Gelfand transform of commutative Banach algebras, Math. Nachr. 280 (2007), 105-126.

[16] T. Miura, G. Hirasawa and S.-E. Takahasi, Note on the Hyers-Ulam-Rassias stability of the first order linear differential equation, Nonlinear Funct.

Anal. Appl. 11 (2006), 851-858.

[17] T. Miura, G. Hirasawa and S.-E. Takahasi, A perturbation of ring derivations on Banach algebras, J. Math. Anal. Appl. 319 (2006), 522-530.

[学会発表] (計4件)

(高木啓行)

[1] 古清水大直, 高木啓行:「シフト作用素に関する2・3の注意」, つくばセミナー, 筑波大学, 2009年3月10日.

[2] 高木啓行:「バナッハ空間でシフト作用素を考える」, つくばセミナー, 筑波大学, 2007年11月21日.

[3] 高木啓行:「シフト作用素の一般化について」, 関数環研究集会, 岩手医科大学, 2006年12月3日.

(高橋眞映) 主なもの

[4] 高橋眞映:「可換 Banach 環を知ろう」, 日本数学会, 企画特別講演, 近畿大学, 2008年3月25日.

[図書] (計1件)

[1] [翻訳書] スタイン&シャカルチ「フーリエ解析入門」(プリンストン解析講義)/訳者:新井仁之・杉本充・高木啓行・千原浩之, 日本評論社, 2007.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高木 啓行 (TAKAGI HIROYUKI)
信州大学・理学部・教授
研究者番号:20206725

(2) 研究分担者

高橋 眞映 (TAKAHASI SIN-EI)
山形大学大学院・理工学研究科・教授
研究者番号:50007762

(3) 連携研究者

なし