

平成21年 5月20日現在

研究種目：基盤研究（C）一般

研究期間：2006～2008

課題番号：18540168

研究課題名（和文） 放物型方程式の解空間とその上の作用素に関する解析

研究課題名（英文） Analyses of function spaces of solutions of a parabolic equation and operators on these spaces

研究代表者 山田 雅博 (YAMADA MASAHIRO)

岐阜大学・教育学部・准教授

研究者番号：00263666

研究成果の概要：本研究では、放物型ベルグマン空間におけるカールソン測度の特徴付け、幾つかのノルム不等式の研究を行い、幾つかの結果を得た。具体的には、放物型ベルグマン空間におけるカールソン測度の特徴付けを与えた。カールソン測度の特徴付けや幾つかのノルム不等式の研究に関連して、放物型ベルグマン空間上の積分作用素であるトェプリッツ作用素の解析についても行った。特に、有界性やコンパクト性について特徴付けを行った。また、放物型ベルグマン空間の共役調和関数について研究を行い、分数べき微分の概念を用いて、それらの性質についてほぼ明らかに出来たと考える。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	540,000	3,540,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：放物型方程式，ベルグマン空間，トェプリッツ作用素

1. 研究開始当初の背景

本来のベルグマン空間は、単位円板上の正則関数から作られる関数空間であった。これらの研究は、1985年くらいから始まった。また、この空間やその上の作用素などの解析には、主として複素関数論的な手法が多く用いられた。その後、単位球上への拡張やより

一般的な領域への拡張などが行われ、1996年には、ユークリッド空間の上半平面上の調和関数から作られる調和ベルグマン空間へと拡張された。この研究結果は、
W. Ramey and H. Yi, Harmonic Bergman functions on half-spaces, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 348 (1996), 633--660.

にある。西尾, 下村, 鈴木らは, この調和という概念を捉えなおし, 調和関数が, より一般的な放物型方程式の解となっていることを示した。粗く言えば, $0 < \alpha \leq 1$ に対し, ある分数べきの放物型方程式を考え, $\alpha = 1/2$ のときの解が, 調和関数となることを示した。さらに, 全ての $0 < \alpha \leq 1$ に対し, 解空間を定義し, それらを放物型ベルグマン空間と呼び, それらの空間の基本的で重要な性質を導き出した。

2. 研究の目的

本研究では, 西尾, 下村, 鈴木らが導入した放物型ベルグマン空間を中心として, それに付随して定義される放物型ハーディー空間も含めた解空間の解析, およびそれらの空間の上で定義される様々な作用素の解析を行うことを目的とする。ここでは, カールソン測度の特徴付けや, 良く知られたトェプリッツ作用素を中心とした積分作用素の解析を目指す。特にトェプリッツ作用素の可逆性の特徴付けを目指す。

また, 本来のベルグマン空間やハーディー空間において, 興味を持たれているものの1つは共役調和関数の性質の解析である。放物型ベルグマン空間や放物型ハーディー空間においては, 共役調和関数に相当する概念をどのように定義するかが非常に問題である。また, その存在性, 存在したときの性質の解析問題等がある。本研究では, 共役調和関数の研究についても取り組み, これらの問題の解明を目指す。

3. 研究の方法

主として, 微分方程式論, 関数論, 及びポテンシャル論に関する図書の整備を行った。特に, 分数べきの放物型方程式に関する文献を整備した。また, 大学院生による研究補助

として謝金を計上した。代表者と分担者らが, 各々研究打合せをする旅費, 及び研究成果を発表する国内旅費を計上し, 研究打合せと成果発表を行い, 活発に結果について議論等を行った。

4. 研究成果

本研究では, 放物型ベルグマン空間におけるカールソン測度の特徴付け, 幾つかのノルム不等式の研究を行い, 幾つかの結果を得た。

具体的には, 放物型ベルグマン空間におけるカールソン測度の特徴付けについて, L^p 空間から L^q 空間について考察し, 特徴付けを与えた。カールソン測度の特徴付けや幾つかのノルム不等式の研究に関連して, 放物型ベルグマン空間上の積分作用素であるトェプリッツ作用素の解析についても行った。基本的な有界性やコンパクト性の解析を行い, 有界性やコンパクト性について特徴付けを行った。これらの結果の他にも, 放物型ベルグマン空間における, 共役調和関数について考察し, 幾つかの結果を得ている。具体的には, 放物型ベルグマン空間の共役調和関数について, 分数べき微分を用いてそれらの解析を得ることを目指した。部分的な課題は残るものの, ほぼ放物型ベルグマン空間の共役調和関数の性質については明らかに出来たと考える。その成果は, 2008年度秋の日本数学会において講演発表を行い, 論文については投稿中である。

さらには, トェプリッツ作用素について, 固有値を用いて定義される S^σ クラス ($1 \leq \sigma < \infty$) の特徴付けに関する研究を行った。これらは, 単に S^σ クラスの特徴付けのみに止まらず, より一般的にオーリッツ族へと拡張して研究を行った。この研究の成果も論文として投稿し, すでに受理されて出版予定である。 S^σ ク

ラス ($1 \leq \sigma < \infty$) の更なる研究として、 $\sigma < 1$ なる場合の特徴付けについても考察している。これを行うため、放物型ベルグマン空間における簡単な場合のアトミック分解の概念についても研究を行った。このアトミック分解の研究については、本研究を良い機会として、更なる発展の可能性を含んでいることが示唆された。 $\sigma < 1$ なる場合の特徴付けについては、トエプリッツ作用素を定義する測度のベルツィン関数や平均関数を用いて特徴付けられることが解った。ベルツィン関数を用いての特徴付けと平均関数のそれとは、部分的に同値であることも示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 17 件)

(1) 査読有り M. Nishio, N. Suzuki, and M. Yamada,
Interpolating sequences of parabolic Bergman spaces,
Potential Analysis Vol.28, 357--378 (2008).

(2) 査読有り M. Nishio, N. Suzuki, and M. Yamada,
Compact Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces,
Hiroshima Mathematical Journal, Vol.38, 177--192 (2008).

(3) 査読有り T. Nakazi and T. Yamamoto,
Generalized Riesz projections and Toeplitz operators,
Mathematical Inequalities & Applications, Vol.11 (2008), 507-528.

(4) 査読無し T. Aiki, A mathematical model for bacteria growth, Recent Advances in Nonlinear Analysis, the proceedings of the international conference on nonlinear analysis, World Scientific, 2008, 1-10.

(5) 査読無し T. Aiki, A mathematical model for a valve made of a spring of a shape memory alloy, Nonlinear Phenomena with Energy Dissipation, mathematical analysis, modeling and simulation, Gakuto International Series, Mathematical Sciences and Applications, Vol. 29, 2008, 1-18.

(6) 査読有り Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, An elementary proof of Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces $L^{1, \nu, \beta}(G)$, Hiroshima Math. J. Vol.38, (2008), 425-436.

(7) 査読有り Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev's inequalities and vanishing integrability for Riesz potentials of functions in the generalized Lebesgue space $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$, J. Math. Anal. Appl. Vol.345, (2008), 70-85.

(8) 査読有り Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, J. Math. Soc. Japan Vol.60, (2008), 583-602.

(9) 査読有り T. Futamura and T. Shimomura, Lindelöf of theorems for monotone Sobolev

functions with variable exponent, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Vol.84, (2008), 25-28.

(10) 査読有り Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Integrability of maximal functions for generalized Lebesgue spaces with variable exponent, Math. Nachr. Vol.281, (2008), 386-395.

(11) 査読有り M. Nishio, N. Suzuki, and M. Yamada, Parabolic dilations with application to Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, Proceedings of the 15th ICFIDCAA Osaka 2007 OCAMI Studies Vol. 2, pp.307--312 (2008).

(12) 査読無し M. Nishio, N. Suzuki, and M. Yamada, 放物型 Bergman 空間上の Toeplitz 作用素, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol.1553, 181-195 (2007).

(13) 査読有り M. Nishio, N. Suzuki, and M. Yamada, Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces, Hokkaido Mathematical Journal Vol.36, 563--583 (2007).

(14) 査読有り T. Nakazi and T. Yamamoto, Finite dimensional semisimple Q -algebras, Linear Algebra and its Applications, Vol.420 (2007), 407-423.

(15) 査読有り Y. Mizuta and T. Shimomura, Vanishing exponential integrability for Riesz potentials of functions in Orlicz classes, Illinois J. Math. Vol.51, (2007), 1039-1060.

(16) 査読無し Y. Mizuta and T. Shimomura, Continuity properties and vanishing exponential integrability of Riesz potentials of Orlicz functions, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol.1553, (2007), 137-148.

(17) 査読有り Y. Mizuta and T. Shimomura, Maximal functions, Riesz potentials and Sobolev's inequality in generalized Lebesgue spaces, Advanced Studies in Pure Mathematics Vol.44, Potential Theory in Matsue, 255-281, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.

[学会発表] (計20件)

(1) M. Yamada, Carleson inequalities on parabolic Bergman spaces, 日本数学会 2008 年度年会 (近畿大), 2008

(2) T. Yamamoto, Three dimensional commutative Banach algebras and Q -algebras, 第17回 関数空間セミナー (東京理科大学), 2008

(3) T. Aiki, A free boundary problem for the shape memory alloys in case the temperature is

unknown , PDE approximations in Fast reaction - Slow diffusion scenarios, (Leiden University) , the Netherlands, 2008

(4) T. Aiki, Free boundary problems for a valve made of shape memory alloys , 7th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and applications, (University of Texas at Arlington, USA), 2008

(5) T. Aiki, コンクリートの中酸化について, 第3回非線形数理科学, (千葉大学教育学部), 2008

(6) T. Shimomura, Continuity properties for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, 日本数学会秋季総合分科会 (東京工業大学) , 2008

(7) T. Shimomura, Sobolev's inequalities for Riesz potentials of functions in the generalized Lebesgue space $L^{p(\cdot)}$ ($L^{q(\cdot)}$) , FSDONA Workshop, (Helsinki University), Finland, 2008

(8) M. Yamada, Carleson inequalities on parabolic Bergman spaces, ポテンシャル論研究集会 (広島大), 2007

(9) M. Yamada, Interpolating sequences of parabolic

Bergman spaces, 日本数学会 2007 年度年会 (埼玉大), 2007

(10) M. Yamada, Interpolating sequences of parabolic Bergman spaces, ポテンシャル論研究集会 (千葉大), 2007

(11) T. Yamamoto, Two dimensional commutative Banach algebras and Q-algebras, 第16回関数空間セミナー (東京理科大学) , 2007

(12) T. Yamamoto, One dimensional singular integral operators $aP+bQ$ on weighted L^2 spaces, International Conference: Operator Theory and its Applications, (Kyungpook National University, Daegu, KOREA) , 2007

(13) T. Shimomura, Boundedness of maximal operators of variable exponent and Sobolev's inequalities for Riesz potentials , Finland-Japan joint seminar, (Helsinki University), Finland, 2007

(14) T. Shimomura, Vanishing exponential integrability for Riesz potentials of functions in Orlicz classes, 日本数学会春季総合分科会 (埼玉大学), 2007

(15) M. Yamada, On compactness of Toeplitz operators and

Carleson measures for parabolic Bergman spaces,

ポテンシャル論とその関連分野 (京都大学数理解析研究所), 2006

(16) M. Yamada,

放物型 Bergman 空間上の Toeplitz 作用素のコンパクト性,

日本数学会 2006 年度秋季総合分科会 (大阪市大), 2006

(17) T. Yamamoto,

Three dimensional commutative operator algebras and Q -algebras (II),

第 15 回 関数空間セミナー (北海道大学), 2006

(18) T. Nakazi and T. Yamamoto,

Finite dimensional semisimple Q -algebras International Workshop on Operator Theory and its Applications,

(Seoul National University, Seoul, KOREA), 2006

(19) T. Shimomura,

Vanishing exponential integrability for Riesz potentials of functions in Orlicz classes,

ポテンシャル論とその関連分野研究集会 (京都大学数理解析研究所), 2006

(20) T. Shimomura,

Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent,

Analysis seminar, (Helsinki University), Finland, 2006

[その他]
なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山田 雅博 (YAMADA MASAHIRO)

岐阜大学・教育学部・准教授

研究者番号: 00263666

(2) 研究分担者

山本 隆範 (YAMAMOTO TAKANORI)

北海学園大学・工学部・教授

研究者番号: 60182630

愛木 豊彦 (AIKI TOYOHICO)

岐阜大学・教育学部・准教授

研究者番号: 90231745

下村 哲 (SHIMOMURA TETSU)

広島大学・教育学研究科・准教授

研究者番号: 50294476

米田 力生 (YONEDA RIKIO)

小樽商科大学・商学部・准教授

研究者番号: 70342475

(3) 連携研究者

なし