

平成 22 年 5 月 31 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2009

課題番号：18540169

研究課題名 (和文) ベルグマン空間のポテンシャル論的解析

研究課題名 (英文) Potential analysis for Bergman spaces

研究代表者

鈴木 紀明 (SUZUKI NORIAKI)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：50154563

研究成果の概要 (和文)：Laplace 作用素と熱作用素を統一的に取り扱う目的で，上半空間に放物型作用素を導入し，その作用素が作る Bergman 空間を定義した．この空間に作用する様々な線形作用素を解析し，特に，Carleson 埋め込みと Toeplitz 作用素の有界性とコンパクト性を示した．

研究成果の概要 (英文)：Unifying the Laplace and the heat operators, we introduce parabolic operators on the upper half space and define parabolic Bergman spaces. We study some linear operators acting on them, in particular, we show the boundedness and compactness of Carleson imbedding and Toeplitz operators.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	800,000	0	800,000
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
総計	3,300,000	750,000	4,050,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：放物型作用素，Bergman 空間，Carleson 埋め込み，Toeplitz 作用素，ポテンシャル論

1. 研究開始当初の背景

もともとの Bergman 空間は単位円板上の正則関数の作る Banach 空間であるが，

1980 年頃から調和関数を対象とする研究が始まった．特に，2000 年前後からは Euclid 空間の上半空間における調和 Bergman 空

間の研究が S. Axler, B.R. Choe, K. Zhu, D.H. Luecking らにより大いに発展し、その研究は現在も続いている。また、同じ頃に、K. Bogodan を中心とする東欧のグループは α -調和関数の境界挙動についての Martin 境界に難する興味深い結果を出し始めた。一方で研究代表者と連携研究者のひとりである西尾は熱方程式の平均値の性質を一般化する形で α -放物型作用素の調和測度の解析を行っていた。

以上の3つの研究を融合する形で α 次の放物型 Bergman 空間が定義され、その基礎理論の研究が始まった。

2. 研究の目的

(1) ポテンシャル解析とは作用素そのものではなく、その基本解の解析を通して解の性質を調べるもので、例えば調和測度の評価などが重要である。ポテンシャル解析を主道具にして、放物型作用素を解析するとともに、逆に、放物型 Bergman 空間の研究を通してポテンシャル解析自体の深化・発展を目指す。

(2) α -放物型作用素は $\alpha = 1/2$ のときは調和関数、 $\alpha = 1$ のときは熱作用素の解と深く関係する。放物型 Bergman 空間の範疇で解析することによって、ラプラス作用素と熱作用素の類似性と差異性を明確にする。

(3) 放物型 Bergman 空間の基礎的性質、基本解の評価、Huygens の性質、再生成、双対性、Bloch 空間の解析などを行う。それらを基礎にして Carleson 埋め込みと Toeplitz 作用素の有界性とコンパクト性を調べる。

3. 研究の方法

(1) 関連する論文や専門書を使っての日々の研究が主体となるが、それらを整理し、まとめることも重要である。その方法として、3ヶ月に一度程度に連携研究者との勉強会を開催した。代表者が全体のプランを示し、連携研究者がそれぞれ偏微分方程式論や関数解析学からのアプローチで問題点に迫り、研究代表者が総括する形で研究を進めたがこれは大変に有益であった。

(2) 研究代表者は毎週金曜日の午後にポテンシャル論セミナーを開催している。これは近隣の関数論研究者を中心に10名程が集まって、研究成果発表や論文紹介を行うものである。このセミナーには連携研究者も可能な限り参加していて、本研究にうまく活用できた。例えば、専門的知識を得るために他大

学の研究者をセミナーの講師に招いた。また、本研究に興味を持つ大学院生に関連する文献の紹介をしてもらった。

(3) 学会や関連する研究集会での発表後の議論も有益であった。

4. 研究成果

(1) 放物型作用素の解析が分数べき作用素を扱う確率解析や量子解析の研究と類似する部分があることがわかった。具体的な成果はまだ得られていないが、この観点からポテンシャル解析へのフィードバックが期待できる。現在、量子解析の研究者との議論を始めている。

(2) $\alpha = 1/2$ のとき、上半空間での放物型 Bergman 空間は通常の調和 Bergman 空間と一致する(半空間でないとは一致しない。例えば帯状領域では両者は異なる)。我々の研究はこれまでに S. Axler や B.R. Choe, K. Zhu らによってなされた調和 Bergman 空間における諸結果を α -放物型作用素に一般化させている。その結果、 α についての依存性を通して、Laplace 作用素と熱作用素の相違点が定量的に確かめられた。

(3) Carleson 埋め込みと Toeplitz 作用素に関しては当初の目標以上の成果があったと思う。得られた結果を列挙する。

① 上半空間での研究を帯状領域に拡張し、そこでの再生核を具体的に計算した。

② 放物型相似性 (parabolic similarity) を定式化して、Radon 測度の平均関数と Berezin 変換についての解析をより一般の形に深化させた。

③ 指数 p の Bergman 空間を指数 q の Lebesgue 空間へ埋め込む Carleson 埋め込み、および、指数 p の Bergman 空間から指数 q の Bergman 空間への Toeplitz 作用素の有界性について、指数が $p \leq q$ の場合に、平均関数と Berezin 変換を使っての特徴付けに成功した。

④ 放物型 Bergman 空間における補間点列の理論を証明し、それを使って、残された場合 $p > q$ での二つの作用素の有界性に関する最終結果を得た。

⑤ Carleson 埋め込みとその共役の合成が Toeplitz 作用素になることを明確にして、こ

れらがコンパクトになる必要かつ十分条件を得た．さらにコンパクト作用素を Schatten 族に分類してより精密な解析を行った．

⑥ Schatten 族分類について Orlicz 型の空間の範疇での整理を試みている．

⑦ 古典的には Bergman 空間に類似するものとして Hardy 空間が研究されている．放物型作用素に対する Hardy 型の空間を定義して，類似する問題の考察を始めた．

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

① M.Nishio, N.Suzuki, and M.Yamada, Carleson inequalities on parabolic Bergman spaces, *Tohoku Math. J.* 62 (2010), to appear, 査読あり

② M.Nishio, N.Suzuki, and M.Yamada, 放物型ベルグマン空間上の作用素について, 京都大学数理解析研究所講究録, (2010), 掲載予定, 査読なし

③ M.Nishio, N.Suzuki, and M.Yamada, Weighted Berezin transformations with application to Toeplitz operators of Schatten class on parabolic Bergman spaces, *Kodai Math. J.* 32 (2009), 501-520, 査読あり

④ N.Suzuki, Potential analysis of parabolic Bergman spaces, *Research reports of Faculty of Sci. and Tech. Meijo University*, 49 (2009), 5-12, 査読なし

⑤ M.Nishio, N.Suzuki, and M.Yamada, Toeplitz operators of Schatten class on the parabolic Bergman space, *Proceeding of 16th ICFIDCAA*, (2009), 305-311, 査読あり

⑥ M.Nishio, N.Suzuki, and M.Yamada, Compact Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, *Hiroshima Math. J.* 38 (2008), 177-192, 査読あり

⑦ M.Nishio, N.Suzuki, and M.Yamada, Interpolating sequences of parabolic Bergman spaces, *Potential analysis* 28

(2008), 357-378, 査読あり

⑧ M.Nishio, N.Suzuki, and M.Yamada, Parabolic dilations with application to Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, *Proceedings of 15th ICFIDCAA, OMUP* (2008), 307-312, 査読あり

⑨ M.Nishio, N.Suzuki, and M.Yamada, Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces, *Hokkaido Math. J.* 36 (2007), 363-583, 査読あり

⑩ M.Nishio, N.Suzuki, and M.Yamada, 放物型 Bergman 空間上の Toeplitz 作用素, 京都大学数理解析研究所講究録, 1553 (2007), 181-195. 査読なし

⑪ M.Nishio, K.Shimomura, and N.Suzuki, L_p boundedness of Bergman projections for α -parabolic operators, *ASPM* 44 (2006), 305-318, 査読あり

[学会発表] (計 7 件)

① 西尾昌治, 放物型 Bergman 空間上の Schatten-Herz 族 Toeplitz 作用素について, 日本数学会 2010 年度年会, 2010 年 3 月 24 日, 慶応義塾大学(横浜)

② 西尾昌治, 放物型 Bergman 空間における指数 1 以下の Schatten 族 Toeplitz 作用素の特徴付け, 日本数学会 2009 年度年会, 2009 年 3 月 28 日, 東京大学

③ 西尾昌治, Toeplitz operators of Schatten class on the parabolic Bergman spaces, 日本数学会 2008 年秋季総合分科会, 2008 年 9 月 24 日, 東京工業大学

④ 西尾昌治, Carleson inequalities on parabolic Bergman spaces, 日本数学会 2008 年度年会, 2008 年 3 月 24 日, 近畿大学

⑤ 山田雅博, Interpolating sequences of parabolic Bergman spaces, 日本数学会 2007 年秋季総合分科会, 2007 年 3 月 30 日, 埼玉大学

⑥ 西尾昌治, 放物型 Bergman 空間における Toeplitz 作用素のコンパクト性, 日本数学会 2006 年秋季総合分科会, 2006 年 9 月 19 日, 大阪市立大学

⑦N. Suzuki, On parabolic Bergman spaces,
(poster) International Congress of
Mathematics, 2006.8.24, Madrid (Spain)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 紀明 (SUZUKI NORIAKI)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号：5 0 1 5 4 5 6 3

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

西尾 昌治 (NISHIO MASAHARU)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：9 0 2 2 8 1 5 6

下村 勝孝 (SHIMOMURA KATSUNORI)
茨城大学・理学部・准教授
研究者番号：0 0 2 0 1 5 5 9

山田 雅博 (YAMADA MASAHIRO)
岐阜大学・教育学部・准教授
研究者番号：0 0 2 6 3 6 6 6