様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月３１日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006～2009
課題番号：１８５４０１７３
研究課題名（和文）　偏微分方程式系に対する解の一意接続性・極限吸収原理とその応用

研究課題名（英文）Strong unique continuation property and limiting absorption principle for partial differential systems with their applications

研究代表者
大鍛治　隆司（OKAJI TAKASHI）
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：２０１６０４２６

研究成果の概要（和文）：　光速で運動する電子に代表される相対論的粒子の運動を記述するディラック方程式について、ポテンシャルが零次斉次の場合に、光速度が十分大きいと見なせる状況においては、スペクトルは絶対連続スペクトルのみであり、束縛状態は存在しないことを示した。また、流体現象に現れるストークス方程式について係数が強い特異性（臨界指数）をもつ場合においても、1点で無限次の零点を持つ解は常に恒等的に零であること（強一意接続性）を示した。

研究成果の概要（英文）：We investigate properties of solutions to system of equations including the Dirac equation which described the relativistic particles like electrons. In particular we establish that the Dirac equation with potential homogeneous of degree zero has only absolutely continuous spectra and it has no bound states if the velocity of light is large enough. Moreover we prove that the Stokes equation in fluid mechanics has strong unique continuation property even if its coefficients have strong singularities with critical order.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
１８年度	1,000,000	0	1,000,000
１９年度	900,000	270,000	1,170,000
２０年度	900,000	270,000	1,170,000
２１年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総　計	3,400,000	720,000	4,120,000

研究分野：偏微分方程式論
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：偏微分方程式系・解の一意接続性・極限吸収原理・ディラック作用素

１．研究開始当初の背景

近代偏微分方程式論においては、1960 年代に関数解析学的手法を用いて、楕円型方程式、放物型方程式、双曲型方程式、シュレディンガー方程式などの線形方程式に対する境界値問題・初期値問題等の基本的諸問題に対する解の存在定理が確立された。次いで 1970 年代になると、詳細なフーリエ解析的手法(擬微分作用素、超局所解析)を用いて解の特異性の伝播などに代表される解の定性的性質が明らかにされ始めた。その後 1980 年代以降には Strichartz 不等式を初めとする解の定量的評価が確立され現在も発展しつつある。これ等の定量的評価のおかげで各種非線形発展方程式の研究が飛躍的に発展した。しかしながら、これらは主に単独方程式に対するものが中心であり、残念ながらシステムについてはその構造の複雑さからあまり研究が進んでいないのが現状である。そこで、数理物理学に現れる各種の偏微分方程式系（システム）に着目すると共に、解の定性的性質と定量的評価の中間に位置づけされる「解の一意接続性」と「極限吸収原理」という 2 つの重要な性質を取り扱うこととした。

２．研究の目的

本研究では、主に数理物理学に現れる各種の偏微分方程式系（システム）に対する「解の一意接続性」と「極限吸収原理」という2つの重要な性質を考察の対象とする。解の一意接続性は「偏微分方程式の解がある部分集合で零であるならば全体で恒等的に零である」という性質であり、カルレマン不等式と呼ばれる重み付き評価式が重要な役割を果たす、一方極限吸収原理は作用素のスペクトルの性質に関連した、作用素のレゾルベントについての評価式である。これらは共に複素位相を持つ重み付き評価子であるという特徴を持つ。

これらの性質の応用として、連続スペクトル中の固有値の非存在、スペクトルの絶対連続性、時間発展方程式について束縛状態の非存在、さらに散乱状態の解に対する時間遠方での極限構造解析等が挙げられる。

さらに、各種の偏微分方程式系についてどのような条件の下で解の強一意接続性が成り立つかを明らかにしたい。

３．研究の方法

まず始めに相対論的粒子の運動を記述するディラック方程式や相対論的シュレディンガー方程式についてポテンシャルが減衰しない場合に極限吸収原理を考える。これはある重み付き空間におけるレゾンベントの定量的な評価式を基礎にしている。ポテンシャルが空間遠方で減衰する場合には、極限吸収原理を導く代表的アプローチとして共役作用素法（conjugate operator method）または Mourre 理論と呼ばれる強力な函数解析的方法があるが、今の場合はこれとは少し異なる弱共役交換子法を用いる。また、共役作用素としては通常選択されるものとは異なり、新たに古典的運動量作用素を採用することが重要である。

また、流体現象に現れるストークス方程式（2 階システム）について「1点で無限次の零点を持つ解は常に恒等的に零である」という強一意接続性がどのような条件の下で成り立つかを考える。この際、従来の標準的方法においては、カルレマン不等式と呼ばれる大きなパラメータを持つ重み付き不等式における重み函数をうまく選ぶことにより直接強一意接続性を導いていたのであるが、今の場合は重み函数を 2 種類用意してカルレマン評価式を2段階で用いることによっ

て、より弱い条件下で強一意接続性を導く。

４．研究成果

（1） 1 階楕円型偏微分方程式系の中でも数理物理学における最も重要な方程式の一つである相対論的粒子の運動を記述するディラック方程式をとりあげ、その定常作用素のスペクトルを極限吸収原理の立場から研究を行った。

ディラック方程式に付随する定常ディラック作用素については、ポテンシャルが空間遠方で減衰する場合や空間遠方で発散する場合には国内外において、そのスペクトル構造はよく研究され詳しく解明されていた。しかしながら、ポテンシャルが空間遠方で減衰も発散もしない場合には全く何もわかっていなかった。そこで、いままで取り扱いが困難であった空間遠方で減衰しないポテンシャルクラスの代表例として、零次斉次ポテンシャルを考え、極限吸収原理と呼ばれる対応するディラック作用素のレゾルベントに関するある重み付き不等式をスペクトルパラメーターのある可算個の点を除いて成り立つことを示した。単独作用素であるシュレディンガー作用素については対応する結果は Herbst によりすでに得られていたがそれをディラック作用素に拡張したものがこの結果である。しかしながらそのための方法としては新しい考え方が必要である。即ち従来、極限吸収原理を示すには函数解析学的手法としての交換子法と呼ばれるムール理論を用いるのであるが、我々の結果ではその理論を適用する際、共役作用素としては従来のものとは異なり、古典的運動量作用素を用いている。この共役作用素の選び方は従来にはない新しい考え方であって、他の方程式に対する研究にも非常に有効である。よってこの研究の内外に与える影響は強いインパクトがあると考えられる。

（2） さらに、光速度が十分大きいときには、ディラック作用素についての極限吸収原理が除外値無しでスペクトルパラメータ全域において成り立つことを示した。

このため、まずディラック作用素自身は Foldy-Wouthuysen-Tani 変換と呼ばれるあるユニタリ変換を用いて符号の異なる一対の（単独方程式である）相対論的シュレディンガー作用素の摂動と捉え直すことが可能であることに着目し、まずその第1近似である相対論的シュレディンガー作用素に対する一様な極限吸収原理（ある種の重み付き L2評価）をスペクトルパラメーターの除外値なしで成り立つことを示した。そのための方法として、標準的なムール（Mourre）理論（交換子法）ではなく、いわゆる弱共役交換子法を用いることとし、付随する共役作用素として通常の場合とは異なり、相対論的シュレディンガー作用素から決まる新しい作用素を採用した。この作用素はポテンシャルに依存しないことが重要である。この一様評価式はそれ自身でも意味のある重要な結果であることは言うまでもない。

この一様評価式を基礎にして、ディラック作用素が1階システムであるという特性をうまく生かした摂動論的考察を加えることにより、光速度が十分大きい場合には、ディラック作用素自体についても同様の極限吸収原理が除外点なしで成り立つことが示された。これから直ちに、ディラック作用素のスペクトルは絶対連続スペクトルしか持たないことが従う。 この結果、対応する時間発展方程式は束縛状態を持たないことが結論づけられる。

今後の課題としては、これらの結果を踏まえて時間無限大における時間発展作用素に対する解の詳細な漸近挙動を調べることが残されている。

（３）流体の現象に現れるあるストークス方程式に関連した定常作用素について、その解の強一意接続性についての研究を行い、従来の結果を大幅に改良することが出来た。

このストークス方程式は 2 階楕円型方程式系

と見なすことが出来るが、その低階の係数が比較的弱い特異性を持つ場合（劣臨界指数）のみ解の強一意接続性が Regbaoui によって得られていたが、単独方程式における対応する結果とは大きな開きがあった。

そこで、係数がより強い特異性(臨界指数)を持つときを考察し、単独楕円型方程式に対応する結果にほぼ近い結果を得ることが出来た。先行する結果においては、カルレマン不等式から直接一意接続性を導いていたが、この方法では特異性が強い場合には取り扱いが非常に困難であったので、新たにカルレマン不等式における重み函数を取り替えて2段階で用いることにした。その際ストークス方程式系に内在する隠れた基本構造をうまく見いだして、詳細な解析を行うことが重要である。その結果単独楕円型方程式に対する結果に対応する結論を示すことが出来た。今後の課題としては対応するストークス作用素のスペクトルを調べることや、研究対象を一般の 2 階楕円型システムに対して広げることが残されている。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① 大鍛治　隆司、On the spectrum of Dirac operators、数理解析研究所講究録１６０７「スペクトル・散乱問題とその周辺」、６５－７６，２００８

② 大鍛治　隆司，山田　修宣、ディラック作用素のスペクトルについてＩ＆II、第45回実函数論・関数解析学合同シンポジウム講演集，１１５－１４６，２００６

〔学会発表〕（計３件）

① 大鍛治　隆司、Strong unique continuation property for Stokes equations with critical singularities、Linear and Nonlinear Waves, No.7、2009年11月5日、ピアザ淡海、滋賀県立県民交流センター

② 大鍛治　隆司、ストークス方程式に対する解の強一意接続性、日本数学会年会、2009 年 3 月 26 日、東京大学

③ 大鍛治　隆司、相対論的シュレディンガー作用素に対する一様なレゾルベント評価について、日本数学会秋期総合分科会、2008 年 9 月 26 日、東京工業大学

〔図書〕（計　件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者
大鍛治　隆司（OKAJI　TAKASHI）
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：２０１６０４２６

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
山田　修宣（YAMADA　OSANOBU ）
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号：７００６６７４４