

平成21年 4月20日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2008

課題番号：18540178

研究課題名（和文） 非局所非線形微分方程式と最適制御の理論と応用

研究課題名（英文） Theory of nonlocal nonlinear differential equations and optimization, and applications

研究代表者

蚊戸 宣幸 (KATO NOBUYUKI)

島根大学・総合理工学部・教授

研究者番号：40177423

研究成果の概要：サイズ構造を持つ線形個体数変動モデルとその双対問題に対する解の存在と一意性に関する基本理論を整備するとともに最適収穫問題に対して最適制御の存在や最適制御であるための必要条件を与える最大値原理についての結果を得た。また、非線形の場合にも収穫率が時間のみに依存する場合に最適収穫率の存在を得た。一方、多種生物系をモデルとするサイズ構造を持つ一般の非線形系に対する解の存在、総個体数の有界性、および総個体数の減衰に関する結果を得た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,200,000	390,000	2,590,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：サイズ依存，個体数変動，非線形成長率，最適収穫問題，最大原理

## 1. 研究開始当初の背景

- (1) サイズ依存型の個体数変動モデルの研究は、80年代後半頃より研究されはじめたが、成長率がサイズだけに依存する場合は年齢依存型に変換できることから本質的に年齢依存型と同義であった。その後90年代後半になって成長率がサイズと総個体数に依存する非線形成長率をもつものが研究されはじめた。この場合は年齢依存型に変換することはできないので年齢依存型とは異なるのである。

研究代表者はそれまでの一連の研究

において、成長率がサイズと時間に依存する非斉次タイプとサイズと総個体数に依存する非線形タイプについての一般論を展開し、研究開始当初はサイズ依存型個体数変動モデルに対し幅広い非線形性が扱えるようになっていた。

- (2) 数学的アプローチ以外の方法として、数値解析によるアプローチが行われるようになった。特に成長率がサイズと時間と個体数の3つに依存する非線形タイプの個体数変動モデルに対して、数値解析に

よるアプローチが研究されていた。

そこで、この数値解析で扱われた成長率の非線形性を含めたより一般的なサイズ依存型の個体数変動モデルに対する数学的理論を構築する必要性が出てきたことが動機となった。

- (3) サイズ依存型のモデルに対しては、主に1種の生物モデルが扱われていた。一方、生物モデルを考える上で他の生物との係わりは重要で、年齢依存型の場合には多種生物のモデルも研究されていた。  
このような背景からサイズ依存型モデルに対しても相互作用を考慮した多種生物モデルの理論を構築する必要がある。特に、競争系、捕食・被食系、共生系といった相互作用を持つモデルを考えることが動機となった。
- (4) 最適収穫問題と呼ばれる最適制御問題の研究が年齢依存型の非線形個体数変動モデルに対して盛んに行われていた。これは収穫による収穫量や収穫利益を最大にする制御問題で応用上重要な問題である。しかしサイズ依存型モデルに対する最適収穫問題についての研究はまだ十分行われていなかった。  
植物や魚などの個体数変動はサイズに依存する方が現実的であるという点からサイズ依存型個体数変動モデルに対する最適収穫問題の研究の必要性と動機が生まれてきた。

## 2. 研究の目的

- (1) サイズと時間と各時刻における個体数に依存した個体数変動モデルである非局所非線形方程式に対して、その数学的理論を構築するという観点から、解の存在理論と一意性の他、解の正值性、与えられたデータに関する解の連続的依存性などの基礎理論について研究する。
- (2) モデル方程式の定常状態を知ることは解の挙動を知る上でも重要であるので、非局所非線形性を持つサイズ依存型の個体数変動モデルの方程式に対して、非自明な定常解の存在とその安定性について考察する。
- (3) 四季の変化などを考えた場合、モデル方程式の与えられたデータが周期的に変化する場合に周期解が存在するのが自然であるので、非局所非線形性を持つサイズ依存型の個体数変動モデルの方程式に対して、周期解の存在とその安定性について考察する。
- (4) 収穫による利益を最大にすることを目的とする非局所非線形性を持つサイズ依存型の個体数変動モデルに対する最適収穫問題について、その最適収穫率が存在するための必要条件、十分条件、一意性、**Bang-Bang** 性といった最適制御問題を研究する。
- (5) 生物の個体数をいかに制御できるかは重要な問題であり、そのためには収穫率の制御以外にも死亡率や生殖率などを制御する制御問題なども考察する必要があるので、サイズ依存型の個体数変動に関するさまざまな制御理論を考察することを目的とする。
- (6) サイズ依存型の個体数変動モデルを正定化するためにも、より現実的なモデルを研究するためにも、具体的な森林成長モデルや魚類のモデルなどに対して数値解析を行い、モデルを検証するとともに応用を考えることを目的とする。

## 3. 研究の方法

- (1) サイズと時間に依存する成長率を持つ線形個体数変動モデルに対し、解の存在と一意性、解の正值性、与えられたデータに関する解の連続依存性などを考察する。
- (2) サイズと時間に依存する成長率を持つ線形個体数変動モデルに対する最適収穫問題について、最適制御の存在について考察する。
- (3) サイズと時間に依存する成長率を持つ線形個体数変動モデルに対する最適収穫問題について、収穫率が最適であるための必要条件を示す最大値原理を考察し、最適制御が **Bang-Bang** 制御になるかどうかを調べる。
- (4) 成長率がサイズと時間に依存する非線形個体数変動モデルの中でも、特に死亡率が自然死亡率と総個体数に依存した外部環境要因による死亡率に分かれる分離モデルとよばれるものに対して、解の存在と一意性を研究する。
- (5) 成長率がサイズと時間に依存する非線形個体数変動の分離モデルに対し、収穫率が時間のみに依存する場合に収穫モデルの解の存在と一意性を研究する。
- (6) 成長率がサイズと時間に依存する非線形個体数変動の分離モデルに対し、収穫率が時間のみならずサイズにも依存する場

合に、収穫モデルの解の存在と一意性を研究する。

- (7) 四季の周期性を持つ植物モデルを想定して、数値解析を試みる。Box 法とよばれる離散化や特性曲線法による離散化を行い、四季ごとの変動を視覚化する。
- (8) 相互作用を持つ多種の生物系をモデルとするサイズ依存型非線形個体数変動の一般モデルの系について、成長率が時間とサイズに依存する場合と成長率がサイズと総個体数に依存する非線形成長率を持つ場合に分けて考察する。
- (9) 相互作用を持つ2種の生物系をモデルとするサイズ依存型非線形個体数変動方程式で成長率がサイズと時間に依存するタイプに対する最適収穫問題について考察する。
- (10) 同じ非線形成長率を持つ多種生物系のサイズ依存型非線形個体数変動モデルに対して、解の半群性、解軌道がコンパクト性を示し、解の漸近挙動を調べる。

#### 4. 研究成果

- (1) サイズと時間に依存する線形個体数変動モデルに対し、解の存在、一意性、与えられたデータに関する解の連続依存性を示した。また弱解の一意性を示し、双対問題の解の存在と一意性などを示した。
- (2) サイズと時間に依存する線形個体数変動モデルに対し、収穫量や利益を最大にする収穫率を求める最適収穫問題について考察し、最適収穫率の存在するための十分条件を得た。
- (3) サイズと時間に依存する線形個体数変動モデルに対し、収穫率が最適であるための必要条件を示す最大値原理も得た。その結果を用いて、最適制御が本質的に有限個の値しかとらない Bang-Bang タイプであるための十分条件を与えた。
- (4) 分離モデルと呼ばれる非線形のサイズ依存型個体数変動モデルに対する収穫問題でサイズと時間に依存する収穫率を持つものに対し、一意正值解の存在を示した。
- (5) サイズ依存型の個体数変動モデルに対して、時間周期的解の存在については知られていないが、四季の周期性を持つ植物モデルを想定して、Box 法とよばれる離散化を行って数値解析を試み、四季ごと

の変動を視覚化した。このことから、周期解の存在が予想される結果が得られた。

- (6) 分離モデルと呼ばれる非線形のサイズ依存型個体数変動モデルに対する最適収穫問題について、収穫率が時間のみに依存する場合に最適収穫率が存在することを示した。
- (7) 相互作用を持つ多種の生物系をモデルとするサイズ依存型非線形個体数変動の一般モデルの系で、成長率が各種で異なり時間とサイズに依存した場合について、解の一意性、正值局所解の存在と大域解の存在、総個体数の有界性及び減衰に関する結果を得た。
- (8) 相互作用を持つ多種の生物系をモデルとするサイズ依存型非線形個体数変動の一般モデルの系で、成長率が各種で異なりしかも総個体数に依存するという非線形性を持つ場合を考察し、正值解の存在を示した。
- (9) 相互作用を持つ2種の生物系をモデルとするサイズ依存型非線形個体数変動モデルに対する最適収穫問題について考察した。2種の生物の間には競争系、捕食・被食系、共生系のいずれの場合にも応用できるモデルで最大値原理を示すとともに最適制御の存在を示した。
- (10) 同じ非線形成長率を持つ多種生物系のサイズ依存型非線形個体数変動モデルに対して、その解が半群性を持つことを示し、さらに解軌道がコンパクトになるための十分条件を与えた。このことにより、解の漸近挙動を調べることができた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① N. Kato, Maximum principle for optimal harvesting in linear size-structured population, *Mathematical Population Studies* 15, 123-136 (2008), 査読有り
- ② N. Kato, Optimal harvesting for nonlinear size-structured population dynamics, *J. Math. Anal. Appl.* 342, 1388-1398 (2008), 査読有り

- ③ N. Kato, A system of non-autonomous nonlinear size-structured population dynamics, Special Issue of Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A 14(S2), 79-84 (2007), 査読有り
- ④ N. Kato, S. Oharu and K. Shitaoka, Size-structured plant population models and harvesting problems, J. Comp. Appl. Math. 204, 114-123 (2007), 査読有り
- ⑤ N. Kato, Linear size-structured population models and optimal harvesting problems, Int. J. Ecol. Dev. Vol. 5 No. F06, 6-19 (2006), 査読有り

[学会発表] (計 4 件)

- ① 蚊戸宣幸, サイズ構造を持つ個体数変動方程式, 2009 年度日本数学会年会実函数論分科会特別講演, 2008 年 3 月 26 日, 東京大学
- ② N. Kato, Optimal harvesting for two-system model in size-structured population, The 5th World Congress of Nonlinear Analysts, 2008. 7., Orlando, Florida, USA
- ③ N. Kato, A system of size-structured population dynamics with nonlinear growth rate, Equadiff07, 2007. 8., Vienna University of Technology, Vienna, Austria
- ④ N. Kato, A system of non-autonomous nonlinear size-structured population dynamics, The 5th International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems, 2006.12., University of Texas-Pan American, Edinburg, Texas, USA

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

蚊戸 宣幸 (KATO NOBUYUKI)  
島根大学・総合理工学部・教授  
研究者番号: 40177423

### (2) 連携研究者

古用 哲夫 (FURUMOCHI TETSURO)  
島根大学・総合理工学部・教授  
研究者番号: 40039128

黒岩 大史 (KUROIWA DAISHI)  
島根大学・総合理工学部・准教授  
研究者番号: 40284020

町原 秀二 (MACHIARA SHUJI)  
埼玉大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 20346373