様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　22　年　4　月　15　日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006　～　2009
課題番号：18540189
研究課題名（和文）高次元領域における走化性方程式系の爆発解の挙動に関する研究

研究課題名（英文）On the Study of behavior of blowup solutions to a chemotaxis system in high dimensional domains

研究代表者
仙葉　隆（SENBA TAKASI）
九州工業大学・大学院工学研究院・教授
研究者番号：30196985

研究成果の概要（和文）：我々は細胞性粘菌の集中現象を記述するために導出された方程式系の爆発解の研究を行った。当該方程式系の解は粘菌の密度に対応している。また、ある時刻・ある場所において解の値が無限大になる事を解が爆発すると言う。この事と粘菌の集中現象が対応していると考えている。我々は、爆発解を構成しその爆発解の性質を解明する事に成功した。この事により、2 次元領域における解の性質と高次元領域における解の性質の違いを明確にした。

研究成果の概要（英文）：We studied blowup solutions to a system introduced to describe the aggregation of cellular slime molds. Solutions of the system corresponds to the density of cells. When the value of a solution is infinite at some place and some time, we say that the solution blows up. The blowup of solutions corresponds to the aggregation of cells. We succeeded to construct blowup solutions and to investigate into the state of blowup solutions. By this research, we identified the difference between the properties of blowup solutions in two dimensional domains and the one in high dimensional domains.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,100,000	0	1,100,000
2007 年度	900,000	270,000	1,170,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	3,400,000	690,000	4,090,000

研究分野：偏微分方程式論
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：関数方程式、走化性方程式、爆発解、Type I 爆発、Type II 爆発

１．研究開始当初の背景

1970 年に Keller と Segel が、走化性を伴う多数の単細胞生物がそれら自身の分泌する化学物質に引き寄せられながら空間上を動き回り数か所に局在し、最終的に多細胞生物のようになっていく現象を記述するためのモデル方程式系を導出した。このモデル方程式系は４つの未知関数によって記述され

る４つの放物型方程式の系である。このモデル方程式系はその後 Nanjandiah、Jäger と Luckhaus、Nagai 等によりいろいろな単純化がなされ、それら単純化された方程式系の研究がなされた。本研究では ２つの未知関数を用いて記述される１つ放物型方程式と１つの楕円型方程式の系として単純化された方程式系について研究を行った。

これら未知関数は空間変数と時間変数の関数である。以後、これら未知関数の事を解と呼ぶ。また、本報告書では我々が研究した方程式系を走化性方程式系と呼ぶ。

本研究を開始した時点での走化性方程式系の研究は、空間領域が２次元有界領域の場合に関する解の性質の研究が主流であり、その代表的な研究成果として以下の事が知られていた。

生物の総量に対応する全積分量の値によって解の挙動は大きく異なる。その閾値は方程式の係数によって定まり、方程式の係数を全て１に正規化した時は ８πになる。解の全積分量が閾値より小さい時 解は時間大域的に存在し有界となる。そして解の全積分量が閾値より大きい時 解の全積分量が空間的にある程度局在していれば解は有限時刻で爆発する。ここで、解がある時刻・ある場所で爆発するとは、その時刻・その場所における関数の値が無限大になる事を言う。そして、その時刻と場所をそれぞれ爆発時刻、爆発点と呼ぶ。

さらに、爆発解の挙動に関してもその形状と爆発の速さについて研究がなされていた。

解が有限時刻で爆発するときは 爆発点に閾値以上の積分量が集中する。つまり爆発時刻における解の極限関数はいくつかのデルタ関数と通常の関数の和の形になる。従って、このような爆発をデルタ関数的な爆発とよぶ。これが爆発の形状に関する研究成果である。一方、爆発時刻を T とし T 以前の時刻 t における解の最大値が (T-t) の負冪の定数倍によって上と下から評価できるとき、その負冪を爆発のオーダーと呼び、これが爆発の速さを表す値となる。走化性方程式系以外でも藤田型非線形熱方程式など爆発解を持つ方程式は多く存在し、それらに関する多くの研究があるが、その中で後方自己相似解と呼ばれる爆発解の研究を爆発解全体の研究の出発点とする事が多く、その解の爆発の速さを Type I 爆発と呼ぶ。走化性方程式の場合、後方自己相似解の爆発のオーダーは -1/2 であるのでそのオーダーで爆発する解を Type I 爆発解と言う。そして、-1/2 より小さいオーダーで爆発する解を Type II 爆発解と呼ぶ。

本研究開始時点で全ての爆発解に対して爆発のオーダーを決定する成果は出ていなかったが Herrero と Velázquez によって Type II の球対称な爆発解が構成されており、後方自己相似解の存在は知られていなかった。

以上が２次元領域における走化性方程式の爆発解の関する先行結果である。

さらに、３次元以上の領域については全積分量についての閾値に関しては、「存在しない」、または「閾値は 0 である」と述べる事ができる。つまり、どんなに全積分量が小さくてもその積分量がある程度局在していれば解は有限時刻爆発する事が知られていた。また、我々の研究によって３次元以上の領域における後方自己相似解の構成がなされていた。

２．研究の目的

上記で述べた本研究を開始する際の研究状況を踏まえ、3 次元以上の領域における走化性方程式系の爆発解の性質を調べ、それらの性質と２次元領域における爆発解の性質の共通点と相違点を調べる事が必要であると考えた。特に、爆発解の性質として上記で述べた爆発解の形状と爆発のオーダーを調べ、全ての爆発解をこの二つの性質で分類する事が出来ると考えていた。

しかし、この問題は壮大でありこの問題に対する完全な解答を本研究期間内に得る事は困難であると考えたため、球対称解に焦点を絞り多くの爆発解を構成し、それらの爆発の形状と爆発のオーダーを決定し、２次元領域における爆発解の性質と３次元以上の領域（以後、高次元領域と呼ぶ。）における爆発解の性質と比較し、その共通点と相違点を明らかにする事を本研究の目的とした。

３．研究の方法

高次元領域における爆発解の研究は Type I 爆発解と Type II 爆発解とに分けて異なる手法で研究する事を考えた。

先に述べたように Type I 爆発解の中で最も基本的で重要な役割をするものが後方自己相似解である。球対称な走化性方程式系においても同様に重要であると考えた。上記のように 我々の研究によって 既に球対称な後方自己相似解は得られており、それを用いてさらに多くの球対称な Type I 爆発解を構成しその性質を調べる事を考えた。そのためには 現在までの研究で得られた後方自己相似解の性質では不十分であり さらに詳しい研究が必要であると考えた。

球対称な後方自己相似解は、本来の方程式系の解を自己相似変換した関数が満たす方程式系の球対称な定常解として特徴付けられる。その方程式系を原点からの距離を変数として書き下し、さらにその変数に関して一階積分することで２階の常微分方程式になる。この２階常微分方程式の解を詳しく研究

する事で球対称な後方自己相似解の性質、特に、その解と特異定常解との交点の位置に関する詳しい研究を行う事を考えた。そして、その研究を踏まえて球対称な Type I 爆発解の構成ならびにその性質の研究を行う事を考えた。

球対称なType II 爆発解の研究において最も中心的な役割を果たすのが球対称な定常解であると考えた。

球対称な定常解は、原点からの距離を独立変数とする２階の常微分方程式となる。この定常解の性質についての研究結果はあるがType II 爆発解の研究に応用するための結果としては不十分であり、さらに精密な解の性質に関する研究を行う事を考えた。

そしてその研究成果を踏まえて、球対称なType II 爆発解の構成とその性質の研究を行う事を考えた。

以上の研究により得られた高次元領域における爆発解の性質と２次元領域における爆発解の性質を比較・検討する事により、それらの共通点と相違点を調べる事を考えた。

この研究と並行して、本研究に関連する研究についての最新の成果ならびに研究手法を検討し、その事を踏まえて上で述べた研究方法を微調整する事も必要であると考えた。そのために各地で開催される研究集会に参加し最新の研究成果を調査や本研究に関する成果報告を行い、他の研究者と情報交換や議論を行う事を考えた。

４．研究成果

研究の方法の欄で述べた事を踏まえ、球対称な Type I 爆発解の研究と球対称な Type II 爆発解の研究成果に分けて述べる。

球対称な Type I 爆発解の研究に関しては、無限個ある全ての後方自己相似解と特異定常解との交点の位置に関する精密な評価を見出すことに成功し、それを用いることで有限な球を領域とする球対称な解が Type I 爆発を起こす初期条件を見出した。この事は、後方自己相似解とは異なる多数の球対称な Type I 爆発解の構成に成功した事を意味する。

この成果は学会発表⑧において発表済みであり、現在その内容を論文雑誌に投稿するために論文にまとめている。

球対称な Type II 爆発解の研究に関しては、球対称な定常解の詳しい性質を調べる事に成功した。特に、原点からの距離と定常解の値の関係について詳しい評価を見出すことに成功した。そして、この定常解の性質を用いて球対称な Type II 爆発解を無限個構成する事が出来た。さらに、構成した解の爆発のオーダーが線形化した方程式の固有値と関係している事、爆発解が爆発点・爆発時刻の近くで定常解を自己相似変換した関数に収束している事がわかった。さらに、これらの解の爆発時刻・爆発点に現れる形状は特異定常解の形状と同じである事がわかった。従って、我々が構成した Type II 爆発解は特異定常解を含めた定常解の性質を持っている事がわかった。この事により、我々が構成した Type II 爆発解の爆発時刻・爆発点における形状と２次元領域におけるそれとは異なる事がわかった。

これらの研究は、論文としてまとめ雑誌論文 ②、③ として発表した。

さらに、２次元領域における球対称な爆発解は常に Type II 爆発を起こす事がわかった。この事は、2 次元領域において球対称な Type I 爆発解が存在しない事を意味しており、その事が高次元領域における爆発解との違いである事がわかった。

この成果は発表講演⑨であげた国際研究集会で発表した。また、論文雑誌②の論文として発表した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　5 件）

①Takasi Senba, Blowup in infinite time of radial solutions for a parabolic-elliptic system in high-dimensional Euclidean spaces, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 査読有, 70, 2009, 2549-2562.

② Takasi Senba, Type II blowup of solutions to a simplified Keller-Segel system in two dimensional domains, Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications, 査読有, 66, 2007, 1817-1839.

③Noriko Mizoguchi and Takasi Senba, Type II blowup solutions to a simplified chemotaxis system, Advances in Mathematics Sciences and Applications, 査読有, 17, 2007, 505-545.

④ Hiroshi Ohtsuka, Takasi Senba and Takashi Suzuki, Blowup in infinite time in the simplified system of chemotaxis, Advances in Mathematics Sciences and Applications, 査読有, 17, 2007, 445-472.

⑤ Takasi Senba, A fast blowup solution to an elliptic-parabolic system related to chemotaxis, 査読有, 11, 2006, 981-1030.

〔学会発表〕（計 10 件）

①仙葉 隆, 溝口紀子, Nonexistence of type II blow-up solution to a parabolic-elliptic system, 日本数学会

2010年度年会, 2010 年3月26日, 應義塾大学 矢上キャンパス.
② 儀我義一, 仙葉 隆, 溝口紀子, Asymptotic behavior of type I blow-up solution to a parabolic-elliptic system, 日本数学会 2010年度年会, 2010年3月26, 慶應義塾大学 矢上キャンパス.
③ 仙葉 隆, 調和写像の熱流に関連するある非線形放物型方程式の爆発解について, 日本数学会 2009 年度年会, 2009年 9月 26日, 大阪大学 待兼山キャンパス.
④ 仙葉 隆, ある非線形熱方程式の解の挙動について, 日本数学会九州支部会 2009 年度年会, 2009年10月17日, 佐賀大学.
⑤ 仙葉 隆, 内藤 雄基, 高次元領域における走化性方程式系の解の自己相似爆発, 日本数学会2009年度年会, 2009年9月26日, 大阪大学 待兼山キャンパス.
⑥仙葉 隆, R^2 におけるある放物型-楕円型方程式系の球対称な無限時刻爆発解の存在と爆発のオーダーについて, 日本数学会 2009年度年会, 2009年3月28日, 東京大学駒場キャンパス.
⑦ Takasi Senba, Grow-up rate of radial solutions for a parabolic-elliptic system in R^2 , Evolution Equations Related Topics and Applications, 2009年9月8日, ミュンヘン(Germany).
⑧仙葉 隆, 内藤 雄基, 走化性方程式の自己相似解の性質について, 日本数学会 九州支部会年会, 2007年10月13日, 宮崎大学.
⑨ Takasi Senba, Blowup of solutions to a parabolic-elliptic system related to biology, 2nd Euro-Japanese Workshop on Blow-up, マドリッド(Spain), 2006年9月4日.
⑩ 仙葉 隆, 内藤 雄基, Multiple continuation of solutions after blow up for semilinear heat equations, 日本数学会2007年度年会, 2007年9月24日, 東北大学仙内キャンパス、仙台.

〔その他〕
ホームページ等
http://horyu.jimut.kyutech.ac.jp/kit/AnnualReport2010.nsf

６．研究組織
(1)研究代表者
仙葉 隆 (SENBA TAKASI)
九州工業大学・大学院工学研究院・教授
研究者番号：30196985
(2)研究分担者
辻川 亨 (TSUJIKAWA TORU)
宮崎大学・工学部・教授
研究者番号：10258288
矢崎 茂俊 (YAZAKI SHIGETOSHI)
宮崎大学・工学部・准教授
研究者番号：00323874
北 直泰 (KITA NAOYASU)
宮崎大学・工学部・准教授
研究者番号：70336056
内藤 雄基 (NAITO YUKI)
愛媛大学・理学部・教授
研究者番号：10231458

(3)連携研究者
該当なし