

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006 年度～2008 年度

課題番号：18540194

研究課題名 (和文) リーマン面の理想境界の研究

研究課題名 (英文) The study on the ideal boundary of Riemann surfaces

研究代表者

正岡 弘照 (MASAOKA HIROAKI)

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：30219315

研究成果の概要：Green 関数をもつ開リーマン面 F に対して、 $h_q(F)$ ($q \geq 1$) を F 上の指数 q をもつ調和 Hardy 空間とする。 $p \neq q$ ($p > 1, q > 1$) のとき、 $h_p(F) = h_q(F)$ がなりたつための必要十分条件を Martin 境界の言葉を用いて与えた。また、 $HD(F)$ を F 上の Dirichlet 積分が有限な調和関数の全体とすると、 $HD(F) = h_q(F)$ ($q \geq 1, q \neq 2$) がなりたつための必要十分条件を Martin 境界の言葉を用いて与えた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,400,000	0	1,400,000
2007 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	600,000	4,000,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード: Green 関数をもつ開リーマン面, 正值調和関数, Dirichlet 積分が有限な調和関数, 調和 Hardy 空間, Martin 境界, 倉持境界, Martin 関数, 調和測度

1. 研究開始当初の背景

2004 年 8 月 23 日～28 日 松江で開催されたポテンシャル論国際研究集会で、 F を Green 関数をもつ開リーマン面とすると、 $HP(F)$ および $HB(F)$ をそれぞれ、 F 上の正值調和関数の差で表わされる調和関数の全体および F 上の有界調和関数の全体とすると、 $HP(F) = HB(F)$ がなりたつための必要十分条件は F のミニマル

な Martin 境界点の個数が有限であり、各ミニマルな Martin 境界点の調和測度が正であることを発表した。 $h_q(F)$ ($q \geq 1$) を F 上の指数 q をもつ調和 Hardy 空間とすると、 $h_1(F) = HP(F)$ および $h_\infty(F) = HB(F)$ であるので、 $p \neq q$ ($p > 1, q > 1$) のとき、 $h_p(F) = h_q(F)$ がなりたつための必要十分条件を考察するこ

とは自然なことである。また、関数論において、 $HP(F)$ および $HB(F)$ のほかに、基本的な調和関数の族として、 F 上の Dirichlet 積分が有限な調和関数の全体があげられる。この族を $HD(F)$ であらわすことにすると、 $h_q(F) = HD(F)$ ($q \geq 1$) がなりたつための必要十分条件を考察することは自然なことである。こうした動機で本研究を開始した。

2. 研究の目的

Green 関数をもつ開リーマン面 F に対して、1. 研究開始当初の背景でとりあげた関数族のほかに、 F 上の恒等的に ∞ でない有界な正值調和関数の単調増大列の極限関数の差で表わされる調和関数全体(この族を $MHB(F)$ であらわすことにする)および F 上の恒等的に ∞ でない Dirichlet 積分が有限な正值調和関数の単調増大列の極限関数の差で表わされる調和関数全体(この族を $MHD(F)$ であらわすことにする)を導入する。このとき、以下の(1)–(6)の各々に対して、Martin 理論、倉持理論あるいは他の理想境界の理論の観点からそれらの必要十分条件を与えることが本研究の目的である。

- (1) $HP(F) = MHB(F)$
- (2) $HP(F) = MHD(F)$
- (3) $HP(F) (=h_1(F)) = h_q(F)$
- (4) $h_q(F) = h_r(F)$ ($q > r > 1$)
- (5) $HD(F) = MHD(F)$
- (6) $HD(F) = h_q(F)$ ($q \geq 1$)

3. 研究の方法

Martin 理論によれば、 $HP(F)$ の要素は Martin 関数によって、 F のミニマルな Martin 境界 Δ_1 の上の測度で表現される。 $HD(F)$, $MHB(F)$, $MHD(F)$ および $h_q(F)$ は $HP(F)$ の部分族であるので、各族の要素は Δ_1 の上の測度で表現されるが、その表現測度は Δ_1 の上の調和測度に関して絶対連続であることが知られている。各族の要素の表現測度に対して、その調和測度に関する密度

関数を対応させると、 $HD(F)$, $MHB(F)$, $MHD(F)$ および $h_q(F)$ の各族の要素は Δ_1 の上のその密度関数の言葉による特徴付けが知られている。また、倉持理論によれば、 $HD(F)$ および $MHD(F)$ の要素についても、ミニマルな倉持境界 Δ_1^k の上のある Borel 関数の Δ_1^k の上の調和測度に関する積分として表現される。これらの事実を用いて、ポテンシャル論的考察を行うことにより、2. 研究の目的で述べた(1)–(6)の各々の必要十分条件を導くことが本研究課題の研究方法である。

4. 研究成果

Green 関数をもつ開リーマン面 F に対して、 $HP(F)$, $HD(F)$, $MHB(F)$, $MHD(F)$ および $h_q(F)$ ($q > 1$) をそれぞれ F 上の正值調和関数の差で表わされる調和関数の全体、 F 上の Dirichlet 積分が有限な調和関数の全体、 F 上の恒等的に ∞ でない有界な正值調和関数の単調増大列の極限関数の差で表わされる調和関数全体、 F 上の恒等的に ∞ でない Dirichlet 積分が有限な正值調和関数の単調増大列の極限関数の差で表わされる調和関数全体および F 上の指数 q をもつ調和 Hardy 空間とする。このとき、次の結果を得た。

- (1) $HP(F) = MHB(F)$ であることと F のミニマルな Martin 境界 Δ_1 の濃度が高々可算で、 Δ_1 の各点が正の調和測度をもつこととが同値である。
- (2) $HP(F) = MHD(F)$ であることと F のミニマルな Martin 境界 Δ_1 の濃度が高々可算で、各 ζ ($\in \Delta_1$) に対して、 ζ で極をもつ Martin 関数 k_ζ が $HD(F)$ の要素であることとが同値である。
- (3) $HP(F) = h_q(F)$ であることと F のミ

ニマルな Martin 境界 Δ_1 の濃度が有限で, Δ_1 の各点が正の調和測度をもつことと同値である。

(4) $h_q(F) = h_r(F)$ ($q > r > 1$) であることとある調和測度 0 の F のミニマルな Martin 境界 Δ_1 の部分集合 N が存在して, $\Delta_1 - N$ の濃度が有限で, $\Delta_1 - N$ の各点が正の調和測度をもつことと同値である。

(5) $HD(R) = MHD(R)$ であることとある調和測度 0 の F のミニマルな倉持境界 Δ_1^k の部分集合 N が存在して, $\Delta_1^k - N$ の濃度が有限で $\Delta_1^k - N$ の各点における調和測度が調和関数として, $HD(F)$ の要素であることと同値である。

(6) $q > 1$ かつ $q \neq 2$ のとき, $HD(R) = h_q(F)$ であることとある調和測度 0 の F のミニマルな Martin 境界 Δ_1 の部分集合 N が存在して, $\Delta_1 - N$ の濃度が有限で, $\Delta_1 - N$ の各点が正の調和測度を持ち, $\Delta_1 - N$ の各点における調和測度が調和関数として, $HD(F)$ の要素であることと同値である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 19 件)

- ① 正岡 弘照, The class of harmonic functions with finite Driehlet integral and the harmonic Hardy spaces on a hyperbolic Riemann surface, 数理解析研究所講究録に 2009 年掲載予定, 査読無
- ② H. Ishida and A. Onoda, An estimation of Hausdorff dimension of totally disconnected Julia sets of z^{m+c} , Acta Human. Sci. Univ. Sangio Kyotiensys, vol. 38, 11-16, 2009 年, 査読有
- ③ M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Weighted Berezin transformations with application to the Toeplitz operators of Schatten class on the parabolic Bergman, Kodai Mathematical Journal に 2009 年掲載予定, 査読有
- ④ M. Nakai and S. Segawa, Types of afforested surfaces, Kodai Mathematical Journal, vol. 32, 109-116, 2009 年, 査読有
- ⑤ S. Morosawa and M. Taniguchi, Dynamics of Structurally Finite Entire Functions with Two Singular Values, Comp.Meth. Funct. Th., vol. 9, 185-198, 2009 年, 査読有
- ⑥ H. Masaoka, When do the harmonic Hardy spaces with distinct indices coincide on a hyperbolic Riemann surface?, Acta Human. Sci. Univ. Sangio Kyotiensys, vol. 37, 1-9, 2008 年, 査読有
- ⑦ H. Masaoka and S. Segawa, On several classes of harmonic functions on a hyperbolic Riemann surface, Proceedings of the 15th ICFIDCAA Osaka 2007 OCAMI Studies, vol.2, 289-294, 2008 年, 査読有
- ⑧ M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Interpolating sequences of parabolic Bergman spaces Potential Analysis, Potential Analysis, vol. 28, 357-378, 2008 年, 査読有
- ⑨ M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Compact Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, Hiroshima Mathematical Journal, vol. 38, 177-192, 2008 年, 査読有
- ⑩ M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Parabolic dilations with application to the Toeplitz operators on parabolic Bergman space, Proceedings of the 15th ICFIDCAA Osaka 2007 OCAMI Studies, vol. 2, 563-583, 2008 年, 査読有
- ⑪ E. Fujikawa, K. Matsuzaki and M. Taniguchi, Dynamics on Teichmüller spaces and self-covering of Riemann surfaces, Mathematische Zeitschrift, vol. 260, 865-888, 2008 年, 査読有
- ⑫ K. Aomoto and M. Ito, Structure of Jackson Integrals of BC_n Type, Tokyo J. of Math. Volume 31, 449-477, 2008 年, 査読有
- ⑬ 正岡 弘照, 双曲型リーマン面上の有界調和関数の族と有限なディリクレ積分をもつ調和関数の族, 数理解析研究所講究録, vol.1553, 132-136, 2007 年, 査読無
- ⑭ M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada,

Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces, Hokkaido Math. J., vol. 36, 563–583, 2007年, 査読有

- ⑮ M. Nakai and S. Segawa, The role of symmetry for pasting arcs in the type problems, Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 52, 1161–1169, 2007年, 査読有
- ⑯ M. Jeong, J. Oh and M. Taniguchi, Equivalence problem for annuli and Bell representations in the plane, J. Math. Anal. Appl., vol. 325, 1295–1305, 2007年, 査読有
- ⑰ H. Masaoka, Quasiconformal mappings and minimal Martin boundary of p -sheeted unlimited covering surfaces of the once punctured Riemann sphere $\mathbb{C} - \{0\}$ of Heins type, Advanced Studies Pure Math., vol. 44, 211–226, 2006年, 査読有
- ⑱ H. Masaoka and S. Segawa, Hyperbolic Riemann surfaces without unbounded positive harmonic functions, Advanced Studies Pure Math., vol. 44, 227–232, 2006年, 査読有
- ⑲ M. Taniguchi, The Teichmüller space of the ideal boundary, Hiroshima Math. Journal, vol. 36, 39–48, 2006年, 査読有

[学会発表] (計 16 件)

- ① 正岡 弘照, The class of harmonic functions with finite Dirichlet integral and the harmonic Hardy spaces on a hyperbolic Riemann surface, 研究集会“ポテンシャル論とその関連分野”, 2009年2月17日, 数理解析研究所
- ② 正岡 弘照, Characterization for coincidence of harmonic Hardy spaces with distinct indices on a hyperbolic Riemann surface, International Workshop on Potential Theory 2008, 2008年12月19日, 学習院大学100年記念会館
- ③ 西尾 昌治, Toeplitz operators of Schatten class on the parabolic Bergman space, Korea-Japan Seminar on Real and Complex Analysis, 2008年12月6日, 東北大学
- ④ 正岡 弘照, When do the harmonic Hardy spaces with distinct indices coincide on a hyperbolic Riemann surface?, ポテンシャル論研究集会, 2008年11月1日, 秋田市中通2丁目1-51 明德館ビル
- ⑤ 西尾 昌治, Toeplitz operators of

Schatten class on parabolic Bergman spaces, 日本数学会 2008年度秋期総合分科会, 2008年9月24日, 東京工業大学

- ⑥ 西尾 昌治, Weighted Berezin transformations with application to the Toeplitz operators of Schatten class on the parabolic Bergman space, The Eleventh Conference on Real and Complex Analysis, 2008年2月18日–2月20日, 広島大学
- ⑦ 正岡 弘照, A characterization that several classes coincide with the class of quasibounded harmonic functions on a hyperbolic Riemann surface, ポテンシャル論研究集会, 2007年11月1日–11月3日, 広島大学
- ⑧ 西尾 昌治, α -parabolic similarities with application to the Toeplitz operator on Bergman spaces, Finland-Japan Joint Seminar on Analysis, 2007年8月27日–8月29日, University of Helsinki
- ⑨ 正岡 弘照, On several classes of harmonic functions on a hyperbolic Riemann surface, The 15th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2007年7月30日–8月3日, 大阪市立大学杉本キャンパス
- ⑩ 西尾 昌治, Parabolic dilations and the Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, The 15th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2007年7月30日–8月3日, 大阪市立大学杉本キャンパス
- ⑪ 正岡 弘照, The class of bounded harmonic functions and the class of harmonic functions with finite Dirichlet integrals, ポテンシャル論研究集会, 2007年1月11日–1月12日, 千葉大学理学部
- ⑫ 西尾 昌治, On the relation of the Berezin transformation and averaging functions for parabolic Bergman spaces, ポ

- テンシヤル論研究集会, 2007年1月11日-1月12日, 千葉大学理学部
- ⑬ 正岡 弘照, リーマン面上の調和関数の族, 研究集会“ポテンシヤル論とその関連分野”, 2006年12月18日(月)-12月20日, 数理解析研究所
- ⑭ 正岡 弘照, On several classes of harmonic functions on a hyperbolic Riemann surfaces, The Tenth Conference on Real and Complex Analysis in Hiroshima, 2006年11月2日-11月4日, 広島大学
- ⑮ 西尾 昌治, Compact Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, 2006年度日本数学会秋季総合分科会, 2006年9月19日-9月22日, 大阪市立大学
- ⑯ 正岡 弘照, リーマン面上の調和関数の族, 第49回関数論シンポジウム, 2006年9月14日-9月16日, 東京工業大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

正岡 弘照(MASAOKA HIROAKI)
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号: 30219315

(2) 研究分担者

石田 久(ISHIDA HISASHI)
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号: 10103714

西尾 昌治(NISHIO MASAHARU)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 90228156

(3) 連携研究者

瀬川 重男(SEGAWA SHIGERU)
大同工業大学・教養部・教授
研究者番号: 80105634

谷口 雅彦(TANIGUCHI MASAHIKO)
奈良女子大学・理学部・教授
研究者番号: 50108974

青本 和彦(AOMOTO KAZUHIKO)
京都産業大学・理学部・客員教授
研究者番号: 00011495