

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540199

研究課題名（和文） ヒルベルト空間における不変部分空間の構造とその周辺

研究課題名（英文） The structure of invariant subspaces in Hilbert spaces and related topics

研究代表者

大和田 智義 (OHWADA TOMOYOSHI)

静岡大学・教育学部・准教授

研究者番号：50321386

研究成果の概要：

本研究の目的は、ヒルベルト空間における不変部分空間の問題に関連して、自己共役でない作用素環の構造を詳細に調べると共に、それに関する不変部分空間の構造解析を行うものである。我々は極大性の問題を semigroup の性質と結び付けて捉え直すことにより、解析的接合積の diagonal が因子環であるとき解析的接合積が極大であるための付随する semigroup が満たすべき条件を明らかにした。

また、2次元トラス上の Lebesgue 空間に関して、不変部分空間の外枠を捉えることで、その概形をこれまでより詳細に把握することに成功した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	660,000	4,060,000

研究分野：関数解析学

科研費の分科・細目：（分科）数学（細目）基礎解析学

キーワード：invariant subspace(不変部分空間), Hilbert spaces(ヒルベルト空間), analytic crossed products(解析的接合積)

## 1. 研究開始当初の背景

不変部分空間問題は作用素論において最も重要な未解決問題の一つである。それは可分な Hilbert 空間上の全ての有界作用素は自明でない不変部分空間を持つかという問題である。多くの作用素論の研究者がこの問題の解決を目指して、多種多様な理論が展開されており、作用素論の発展に大きく貢献している。例えば正規でない作用素のスペクトル理論の研究が発展し、subnormal 作用素

や hyponormal 作用素などの多くの作用素のクラスが研究されてきた。一方、作用素環論の立場から R.V. Kadison や J.R. Ringrose による triangular 環 [5] や W.B. Arveson による subdiagonal 環 [1] などの自己共役でない作用素環の構造が研究され、それらに誘発されてその後多くの自己共役でない部分環、例えば nest 環や reflexive 環の理論が発展した。

国内においては河村と富山 [6] による

subdiagonal 環の研究に端を発し、その後の斎藤による解析的接合積や subdiagonal 環の不変部分空間の研究は、中路の関数空間における不変部分空間の理論と結びつき、中路と綿谷 [8] の subdiagonal 環の不変部分空間の分類理論へ発展した。これらの流れを受け継ぎ大和田 [9] は近年、解析的接合積の構造解析を精力的に行うとともに、その理論を半群理論と結び付けるなど、これまでのアプローチとは異なる独創的なアイデアによる活動を続けていた。

海外では近年 Pisier や Ruan そして Junge らを中心とした作用素空間の理論が急速に発展しており、それに伴い関数空間の非可換化が行われている (cf. [4][10]).これに関連して、非可換ハーディ空間や subdiagonal 環の研究が、アメリカやヨーロッパを中心として行われていて、現在も多くの研究が進められている (cf. [2], [7], [11]).そこで、これらの関連する国内外の研究者との研究交流を推進することができれば、本研究課題は大きな発展が見込まれる急務な課題であると考えられた。

## 参考文献

- [1] Analyticity in operator algebras, W. B. Arveson, Amer. J. Math., 89 (1967), 578-642.
- [2] A Beurling theorem for noncommutative  $L^p$ -spaces, D. P. Blecher and L. E. Labuschagne, J. Operator Theory, 59 (2008), 29-51.
- [3] Nest-subalgebras of von Neumann algebras: Commutants modulo compacts and distance estimates, F. Gilfeather and D. R. Larson, J. Operator Theory, 7 (1982), 279-302.
- [4] Dilations and rigid factorisations on noncommutative  $L^p$ -spaces, M. Junge and C. Le Merdy, J. Funct. Anal., 249 (2007), 220-252.
- [5] Triangular operator algebras, R.V. Kadison and I. M. Singer, Amer. J. Math., 82(1960), 227-259.
- [5] On subdiagonal algebras associated with flows in operator algebras, S. Kawamura and J. Tomiyama, J. Math. Soc. Japan, 29 (1977), 73-90.
- [6] Noncommutative  $H^p$ -spaces, M. Marsalli and G. West, J. Operator Theory 40 (1998), 339-355.
- [7] Invariant subspace theorems for subdiagonal algebras, T. Nakazi and Y. Watatani, J. Operator Theory, 37 (1997), 379-395.
- [8] On some subalgebras of von Neumann algebras with analyticity, T. Ohwada, J. Funct. Anal., 222 (2005), 274-291.
- [9] Noncommutative  $L^p$  spaces, G. Pisier and Q. Xu, in Vol 2. of Handbook on Banach spaces, North-Holland, Amsterdam, 2003.
- [10] On the maximality of subdiagonal algebras, Q. Xu, J. Operator Theory 54 (2005), no. 1, 137-146.

## 2. 研究の目的

この研究課題においては、作用素環的な手法によって不変部分空間の問題を考察することを目的とする。特に、自己共役でない作用素環の構造を調べることにより、以下に挙げる事項の問題の解決に重点を置いて研究を推進する。これらのアプローチは互いに影響しつつ発展するものであるが、それ自体興味深い研究課題でもあり、独自

の発展も期待できるなど多岐にわたる研究成果が期待できる。

- (1) 正規でない作用素からなる部分環の構造と、それに関する不変部分空間を詳細に調べることにより、正規でない作用素の性質を考察する。
- (2) 可換なハーディ環や関数環の理論を詳細に調べて、その理論から非可換ハーディ空間や非可換関数環の理論を構築する。
- (3) 自己共役でない作用素環の一つで、典型的な例である解析的接合積を取り上げ、半群理論の立場からその代数的構造を調べる。
- (4) 解析的接合積により定義された Toeplitz 作用素や Hankel 作用素の性質や構造をその行列表現を利用して調べる。
- (5) 作用素環におけるスペクトル理論を利用して、自己共役でない部分環の解析的性質を詳細に調べて、その不変部分空間の構造を調べる。

## 3. 研究の方法

本研究は不変部分空間問題の作用素環論的手法による様々なアプローチと、それにより生じる多種多様な問題点の取り組みを具体化することが目的である。

そのために、研究分担者や研究協力者と相互に意見交流しつつ、以下のような計画・方法で課題研究を推進した。

- (1) 研究集会を開催して、関連する最近の研究成果の情報収集及び討論を行うと共に、研究者間の協力体制を整備・強化する。(大和田, 斎藤, Ji, 綿谷)
- (2) 不変部分空間におけるこれまでの理論や最近の発展に関して調査を行い、今後の研究課題の方向性を考察する。(大和田)
- (3) 解析的接合積により定義される Toeplitz 作用素や Hankel 作用素の構造を、その行列表現を用いることにより詳細に調べ、今までの Toeplitz 作用素や Hankel 作用素の理論を再構築する。(大和田)
- (4) 可換な関数環やハーディ環の理論の非可換化を進め、非可換ハーディ空間の理論を構築する。(大和田, 斎藤, Ji)
- (5) 正規でない作用素から生成される作用素環を考え、その構造解析を通じて正規でない作用素の研究を進める。(大和田, Ji, 斎藤)
- (6) 接合積の部分環の研究に半群理論を利用して代数的な特徴づけを行い、作用素環論におけるスペクトル理論を用いた部分環の性質の研究を行う。

(大和田, 齋藤, Ji, 綿谷)

(7) これまでの離散群に関する解析的接合積の理論を, より一般的な群に置き換えて考察する. またその不変部分空間の構造を調べる. (大和田)

(8) 綿谷が行っているヒルベルト空間の部分空間の配置に関する研究を通じて, 不変部分空間の構造を考察する. (大和田, 綿谷, 齋藤)

これらの研究計画を達成するためには研究分担者として齋藤(新潟大学)の解析的接合積とその不変部分空間に対する専門的知識およびバナッハ空間における関数解析的なテクニックと綿谷(九州大学)のヒルベルト空間の部分空間の配置や作用素環論に関する専門的知識が必要であった. また, 研究協力者である中国 Shaanxi Normal Univ. 教授の Ji とは, これまでも共通の問題意識をもって多くの共同研究を行ってきたが, 本研究課題に関しても引き続き Ji の subdiagonal 環における解析的手法とその不変部分空間の理論および作用素論における不変部分空間の専門的知識が重要であった. これら3名の研究者それぞれの専門的知識が研究代表者を中心とし有機的に結びつきながら影響し合い研究が遂行された.

#### 4. 研究成果

本研究の目的は, ヒルベルト空間における不変部分空間の問題に関連して, 自己共役でない作用素環の構造を詳細に調べると共に, それに関する不変部分空間の構造解析を行うものである. 解析的接合積は接合積の自己共役でない部分環としてよく知られていて, これまでに多くの興味深い結果が得られている. その一方で解析的部分環は Arveson によるスペクトル解析の研究に動機付けられ, 作用素環における解析性を中心にして不変部分空間の構造や分解性そして極大性など様々な研究が盛んに行われてきた. von Neumann 環のある部分環を真に含む部分環は全体である場合, その部分環は極大であるという. 解析的接合積における  $\sigma$  弱閉部分環の極大性の問題は1980年代から盛んに行われているがそれらの研究は全て semigroup を固定して考えられてきた. 我々は極大性の問題を semigroup の性質と結び付けて捉え直すことにより, その構造をより深く理解することが出来るのではないかと予想した. 実際に, 解析的接合積の diagonal が因子環であるとき解析的接合積が極大なら, 付随する semigroup はどのような条件を満たさなければならないかを考え, archimedean totally order を引き起こす場合に限るこ

とを突き止めて J. Math. Anal. Appl. へ発表した.

また, これらの研究に関連して, 不変部分空間の構造を研究する上で興味深い対象である2次元トラス上の Lebesgue 空間に関して, その不変部分空間の枠をうまく捉えることでその概形を把握する事に成功し Hokkaido Math. Journal へ発表した.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

- [1] Hasegawa, G. Ji, T. Ohwada and K.-S. Saito, Certain invariant subspace structure of  $L^2(T^2)$  II, Hokkaido Mathematical Journal, 37(2008), 493-505, 査読有
- [2] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and T. Suzuki, On the calculation of the James constant of Lorenz sequence spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 343(2008), 310-314, 査読有
- [3] M. Ionescu and Y. Watatani,  $C^*$ -algebras associated with Mauldin-Williams graphs, Canadian Mathematical Bulletin, 51(2008), 545-560, 査読有
- [4] T. Ohwada, The adjoint of Hankel operators associated with analytic crossed products, Acta Mathematica Hungarica, 117(2007), 27-34, 査読有
- [5] K. Mitani and K.-S. Saito, A note on geometrical properties of Banach spaces using  $\Psi$ -direct sums, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 327(2007), 898-907, 査読有
- [6] M. Enomoto and Y. Watatani, Exotic indecomposable systems of four subspaces in a Hilbert space, Integral Equations and Operator Theory, 59(2007), 149-164, 査読有
- [7] T. Ohwada, Sarason's interpolation theorem for analytic crossed products, Functional Analysis and its Applications, 40(2006), 151-154, 査読有
- [8] G. Ji, T. Ohwada and K.-S. Saito, Commutants of certain analytic operator algebras, Proceedings of the American Mathematical Society, 134(2006), 2975-2982, 査読有
- [9] T. Ohwada, G. Ji, A. Hasegawa and K.-S. Saito, A note on maximality of analytic crossed products, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 315(2006), 216-224, 査読有

[10] M. Enomoto and Y. Watatani, Relative position of four subspaces in a Hilbert space, *Advances in mathematics*, 201 (2006), 263-317, 査読有

〔学会発表〕(計7件)

[1] K.-S. Saito, Refinements of triangle inequalities in Banach spaces, International Workshop on Interpolation Theory, Function Spaces and Related Topic, August 8, 2008, Toledo Spain

[2] Y. Watatani, Complex dynamical systems and associated  $C^*$ -algebras, Operator Structures and Dynamical Systems, Operator Structures and Dynamical Systems, July 21, 2008, Lorentz Center, Leiden, Netherlands

[3] T. Ohwada, 非可換 Hardy 空間に対する Hankel 作用素について, バナッハ空間、関数空間及び不等式の研究とその応用, 2007年6月7日, 京都大学数理解析研究所

[4] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, The geometrical constant and  $\Psi$ -direct sums of Banach spaces, International Symposium on Banach and Function spaces, August 16 2006, Kyushu Insitutute of Technology

[5] Y. Watatani,  $C^*$ -algebras associated with complex dynamical systems, Brazilian Operator Algebras Conference, July 16, 2006, Florianopolis, Brazil

[6] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, Uniform non- $\theta^n$ -ness of direct sums of Banach spaces, バナッハ空間及び関数空間の構造の研究, 2006年6月8日, 京都大学数理解析研究所

[7] T. Ohwada, On the maximal subalgebras of  $L^\infty(G)$ , バナッハ空間及び関数空間の構造の研究, 2006年6月7日, 京都大学数理解析研究所

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

大和田 智義(OHWADA TOMOYOSHI)  
静岡大学・教育学部・准教授  
研究者番号：50321386

### (2) 研究分担者

斎藤 吉助(SAITO KICHISUKE)  
新潟大学・自然科学系・教授  
研究者番号：30018949  
綿谷 安男(WATATANI YASUO)  
九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授  
研究者番号：00175077

(3) 連携研究者  
なし