様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年 6 月 4 日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２００６ － ２００９
課題番号：１８５４０２０５
研究課題名（和文）
現象に現れる非等方的曲率流方程式の解析
研究課題名（英文）
Analysis on anisotropic curvature flow equations in phenomena

研究代表者　儀我　美保（GIGA MI-HO）
東京大学・大学院数理科学研究科・特任研究員
研究者番号：２０４２２３９７

研究成果の概要（和文）：
結晶成長現象解明や画像処理のために、曲線や曲面を一定の法則で変形させる様々な方程式が提案されている。中でも重要な曲率流方程式で、表面エネルギーが非等方的で特異なものに取り組んだ。クリスタライン曲率流方程式に対応する常微分方程式系の初期値問題について、自己相似解と幾何学的手法により、一般初期多角形からの可解性を示した。また特異表面エネルギーが衝撃波解析にも有効な事を示した。さらに結晶成長で必要な非一様外力付曲率流方程式で、比較原理の基礎を粘性解理論を拡張して導いた。

研究成果の概要（英文）：
To analyze crystal growth phenomena and image processing technology, various differential equations governing motion of curves or surfaces under a particular law are proposed. We focused on anisotropic curvature flow equations with very singular interfacial energy. We analyzed one of typical equations, so-called a crystalline curvature flow equation. For any initial polygon, we proved the well-posedness of the initial value problem of the corresponding system of ordinary differential equations by using self-similar solutions and a geometric method. On the other hand, we showed that the idea of singular interfacial energy is effective to mathematical analysis of shock waves. Meanwhile anisotropic curvature flow equations with inhomogeneous external force are important to understand crystal growth phenomena. We derived fundamental comparison principle of them.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	１，２００，０００	０	１，２００，０００
２００７年度	１，０００，０００	３００，０００	１，３００，０００
２００８年度	６００，０００	１８０，０００	７８０，０００
２００９年度	６００，０００	１８０，０００	７８０，０００
総　計	３，４００，０００	６６０，０００	４，０６０，０００

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：非線形現象，界面運動方程式，粘性解，非線形偏微分方程式，結晶成長，
クリスタライン曲率流，自己相似解

１．研究開始当初の背景

結晶成長の界面の運動は、しばしば曲面（あるいは曲線）の非線形拡散型発展方程式で記述される。結晶の界面構造の方向による異方性、つまりある方向に結晶は成長しやすいが、他の方向は成長しにくいという現象を考慮する場合、非等方的曲率$\kappa=\kappa(\alpha)$と呼ばれる効果を導入する必要が生じる。これは、狭義凸の表面エネルギー密度αが単位球面上で与えられた場合、曲面 S に対する表面エネルギーI(S)つまりα(n(x))の S 上積分の、(L^2 内積による)第一変分にあたり、形式的にはκ(x)=divξ(n(x))と書ける。n(x)は曲面 S の点 x の単位法線ベクトル、αは$\alpha=\alpha$(q/|q|)|q|, q∈R^m となるように拡張し、ξ=grad αとした。特にα(q)=|q|ならば divξ(n(x))=div n(x)は平均曲率に一致しているので、非等方的曲率は重みつき平均曲率とも呼ばれる。

本研究では特異な表面エネルギー密度αを許容する設定、つまりαが必ずしも連続微分可能ではなく、対応するウルフ図形に平らな部分があるような非等方的曲率効果を含む界面の発展方程式の解析に焦点をあてた。

またこのテーマは、画像処理技術への応用も期待される。本研究テーマの背景を以下に述べる。

(1) クリスタライン曲率流方程式の初期値問題

表面エネルギー密度αのフランク図形{q∈R^2|α(q)≤1} が多角形の場合、αはクリスタライン・エネルギー密度と呼ばれる。これは表面エネルギー密度がカドを持ち、さらに凸性が退化した特異な例である。クリスタライン・エネルギー曲率流方程式の初期値問題では、初期値が任意の多角形の場合、一般には初期の時点で新しいファセットが生成される。特別な扇型領域が初期形状の場合について、拡大型自己相似解の一意存在性を、研究代表者らは示していた。しかし任意の初期多角形に対する曲線のクリスタライン曲率流方程式による運動の、初期ファセット生成に伴う特異性は部分的にしか解明されていなかった。結晶成長現象解明や、画像処理への応用に、この新ファセット生成メカニズムと可解性の解明が必要であった。

(2) 垂直拡散効果の研究

ショックの現れうる、多次元空間におけるスカラーの１階ハミルトン・ヤコビ方程式

$$\partial u/\partial t+H(u, \mathrm{grad}\ u)=0$$

は、典型的な非線形双曲型偏微分方程式であるが、解のグラフ y=u(t,x)を、(x,y)－平面で運動する曲面とみなし、さらに対応する界面方程式に支配される運動を考えることで、退化放物型方程式タイプの粘性解理論を展開していく方法が近年示唆されていた。しかしショックが現れる場合、その付近でオーバーターン現象を起こし、この曲面を解のグラフと理解すると解は多価になり、これまで知られていた（エントロピー解などの）解と整合しない。これを防ぐために鉛直方向(y－方向)のみに有効な非等方的曲率(垂直拡散と呼ぶ)を新たに方程式に付け加える事が考えられる。この時、ある値より大きい垂直拡散係数を与えなければ、これまで知られていた解とは整合しない事が、特別な初期値について研究代表者らにより調べられていた。より一般的な初期値については解明が進んでいなかった。この方法については未解決な部分が多かった。

(3) 非一様場における特異な表面エネルギーによる曲線の運動の解明

外力が空間に関して一様な場合について、研究代表者らは、特異な非等方的曲率による界面方程式の解の基本定理を、粘性解の理論を拡張することにより等高面の方法で示した。一方、研究代表者らは、外力が作用する場合は、作用しない時と異なり、ファセット(平らな面)が維持されず折れ曲がる可能性のあることを、劣微分の概念を活用して示していた。しかし、外力が一様でない場合の比較原理等の基礎理論の一般論は展開されていなかった。

２．研究の目的

(1) クリスタライン曲率流方程式の初期値問題

表面エネルギー密度に対応するウルフ図形が多角形となる場合、動かすべき図形を admissible と呼ばれる許容多角形に制限すると、そのクリスタライン曲率による運動は常微分方程式系で記述できる。しかし、一般の多角形を初期形状とする場合は、その常微分方程式系の初期値問題は特異で、いわゆる Briot-Bouquet 型の方程式系になる。これについては、解の存在の一般

論はあるが、本問題に関しては未知である。（特別な場合は拡大型自己相似解の構成に帰着される。）この方程式系の特異性は、初期の時点での新ファセット生成に対応している。本研究では、この方程式系の時間局所解の構成に取り組む。

⑵ 垂直拡散効果の研究
ショックの現れる発散型とは限らない１階ハミルトン・ヤコビ方程式の可解性を、垂直拡散を導入して解析する。特に、高さによって成長法則の異なる結晶成長のモデルに関するハミルトン・ヤコビ方程式の初期値問題の可解性解析を行う。垂直拡散係数の適切な大きさの解明が鍵である。

⑶ 非一様場における特異な表面エネルギーによる曲線の運動の解明
特異な非等方的曲率流方程式に外場が加わり、その外場が空間方向に一様でない場合について、滑らかな問題の極限とみなせる自然な解概念を導出する。その上で解の構成を目指す。
一方、曲率流方程式の近似計算法を考える場合、その近似解の収束の速さの評価が重要である。誤差評価の最良性を議論する。まず、一様外場における等方的曲率流方程式を解析する。

３．研究の方法

(1) クリスタライン曲率流方程式の初期値問題
一般の多角形を初期値とするクリスタライン曲率流方程式の初期値問題に対応する、Briot-Bouquet 型の特異性をもつ非線形常微分方程式系について、初期値問題の可解性を調べるために、まず、任意の扇状領域を初期形状とする場合について時間局所存在の証明に取り組む。
一般に、常微分方程式の初期値問題の解法には、Picard による逐次近似法、Cauchy による級数法など、今日、様々な標準的方法が確立されている。しかし、今回取り組む問題は特異性があるため、これらの標準的方法を直接適用することはできない。これらのアイデアを念頭に、個別的考察が必要である。Cauchy の級数法に関しては、特異な常微分方程式に対する一般論がかなり発達しており、形式的ベキ級数が、実際に収束するかどうか判定するための、方程式の構造条件も明らかになっている。この方法を活用するには、取り組む特異常微分方程式系について、構造条件が適用可能かどうかの検証が必要となる。
一方、この問題が幾何学的問題に端を発する事から、この常微分方程式系の近似方程式系の解と、その幾何学的情報を活用する方法も検討する。また、特異性による困難さの現れる、初期のファセット生成時について、拡大自己相似解を利用した解の近似の活用も検討する。

(2) 垂直拡散効果の研究
ショックの現れうる発散型とは限らないハミルトン・ヤコビ方程式の具体的方程式のひとつである、高さによって成長法則の異なる結晶成長のモデルに関するハミルトン・ヤコビ方程式の解析を行う。
解のグラフ $y=u(t,x)$を、(x,y)－平面で運動する曲面とみなし、対応する界面方程式を導出する。これにオーバーターン現象防止のための、垂直拡散項を付加した、退化放物型方程式を導出し、粘性解理論を拡張し、解の概念の定式化を行う。この方程式の近似解を与える、非退化放物型方程式を考案し、垂直拡散係数の適切な値を得る。これにより、もとの方程式の可解性を解明する。

(3) 非一様場における特異な表面エネルギーによる曲線の運動の解明
外力を与えたときに、ファセット(平らな部分)が時間と共に維持されるか、あるいは折れ曲るかを、非等方的曲率の非局所性に起因する困難さに配慮しながら観察して特徴付けを行い、比較原理を念頭にして解の定式化を行う。定式化の大きな枠組みは、粘性解の理論の拡張として取り組むが、最も問題となるファセット折れ曲りにかかわる部分では、劣微分の理論を活用する。

４．研究成果

(1) クリスタライン曲率流方程式の初期値問題
研究すべき Briot-Bouquet 型の特異性をもつ常微分方程式系については、大学院学生も交えて、様々な解法を試みた。代数的方法ともいえる級数法、代表的解析的方法である逐次近似法を試みたが、いずれも様々な理由でうまくいかなかった。そこでクリスタライン曲率流方程式の幾何学的構造に注目し、まず任意の扇形領域を初期形状とする初期値問題に対して、拡大型自己相似解との比較を試みた。その結果、対応する常微分方程式系の初期値問題が、時間局所解をただ一つ持つことが示せた。この議論は、一般の多角形領域を初期形状とする場合にも拡張できる。
これにより、画像処理等における数値計

算で、初期形状が任意の多角形の場合、拡大型自己相似解の活用により、計算精度向上が可能な事も解った。

さらに、様々な偏微分方程式に対して、解の典型例であり、上述のように重要な役割を果たす自己相似解を扱った英文の著書をまとめた。

(2) 垂直拡散効果の研究

解の構成のために近似方程式についての様々なアプリオリ評価得た。これにより、近似解の極限が確かにジャンプを許す真の解に近づくことが分かり、垂直拡散法の数学的基礎付けを与える事ができた。

(3) 非一様場における特異な表面エネルギーによる曲線の運動の解明

等方的曲率流方程式については、連携研究者の石井克幸が外力の付いた平均曲率流方程式をアレン・カーン方程式で近似した際の収束の速さの研究に取り組み、収束の速さの評価の他、その評価が最良であることを例を与えて示した。

特異な非等方的曲率流方程式に、空間的に非一様な外力が加わっている場合、粘性解理論の拡張と劣微分概念の活用により、適切な解の概念を与えた。解の可解性の導出のための、この方程式の比較原理の基礎を導いた。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① Ishii Katsuyuki, Optimal rate of convergence of the motion by mean curvature with a driving force, 査読有, Adv. Differential Equations 12, Vol. 12, 2007, pp.481-514.

〔学会発表〕（計６件）

① Giga Mi-Ho, Motion by Crystalline Curvature with non-admissible data, Analysis Seminar, Department of Mathematics, 2009 年 10 月, The University of Texas at Austin, Austin, U.S.A..

② Giga Mi-Ho, The Crystalline flow starting from non-admissible data, Special Analysis Seminar, Courant Institute of Mathematical Sciences, 2009 年 9 月, New York University, New York, U.S.A..

③ Ishii Katsuyuki, Optimal rate of convergence of Allen-Cahn equation to motion by mean curvature, Workshop on Viscosity Solutions and Related Topics, 2009年1月, 埼玉大学東京ステーションカレッジ.

④ Ishii Katsuyuki, An approximation scheme for motion by mean curvature, Mathematical Aspects of Image Processing and Computer Vision 2008, 2008 年 11 月, 北海道大学.

⑤ Ishii Katsuyuki, Optimal rate of convergence of Allen-Cahn equation to motion by mean curvature, Viscosity, metric and control theoretic methods in nonlinear PDEs, 2008 年 11 月, Departmento di Mathematica, Sapieza Universita de Roma, Italy.

⑥ Giga Mi-Ho, Singular diffusivity and its applications, 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM2007), 2007 年 7 月, Zurich, Switzerland.

〔図書〕（計３件）

① Giga Mi-Ho, Giga Yoshikazu, Saal Jürgen, Nonlinear Partial Differential Equations : Asymptotic Behavior of Solutions and Self-Similar Solutions, Springer, 2010, 査読有, 294 pages.

② Giga Yoshikazu, Ishii Katsuyuki, Koike Shigeaki, International Conference for the 25th Anniversary of Viscosity Solutions, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications, Vol. 30, 2008, 255 pages.

③ 石井克幸, 画像処理と曲率流方程式, 数理科学 2008 年 4 月号特集「現代数学はいかに使われているか[解析編]」, 2008, 6 pages.

６．研究組織

(1)研究代表者

儀我　美保（GIGA MI-HO）

東京大学・大学院数理科学研究科・特任研究員

研究者番号：２０４２２３９７

(2)研究分担者
石井　克幸（ISHII KATSUYUKI）
神戸大学・大学院海事科学研究科・准教授
研究者番号：４０２３２２２７
（H20→H21：連携研究者）