

平成 21 年 5 月 29 日現在

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540213

研究課題名（和文） ボルツマン方程式に対する超局所解析

研究課題名（英文） Microlocal analysis on Boltzmann equation

研究代表者

森本 芳則 (MORIMOTO YOSHINORI)

京都大学・大学院人間・環境学研究科・教授

研究者番号：30115646

研究成果の概要：衝突積分項の積分核が粒子の衝突角度を変数として特異性もつ、non-cutoff ボルツマン方程式に対して、空間一様、非一様な場合の両者について解の平滑効果を示し、後者についてはこれまで未解決であった古典解の局所存在と解の一意性を明らかにした。またボルツマン方程式と、関連するランダウ方程式などの気体運動論の基礎方程式について解の Gevrey 性、解析性、超解析性などのより詳しい滑らかさを考察した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,100,000		1,100,000
2007 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	570,000	3,570,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：ボルツマン方程式、衝突積分項、non-cutoff、平滑効果、湯川ポテンシャル、対数オーダー、Gevrey smoothing, ランダウ方程式

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 気体運動論の基礎方程式であるボルツマン方程式は微分積分方程式であり、物理的に重要なモデルでは、その積分項の核が粒子の衝突角度を変数として特異性を持つ。これまでの多くの研究は特異性をもつ角度が 0 の部分を取り去った (Grad's angular cutoff) 条件の下で議論されてきた。長距離相互作用を考慮した積分核が特異性をもつ場合は、2000 年に発表された Alexandre, Desvillettes, Villani, Wennberg の論文により、衝突積分項の下からの劣楕円型評価が数学的に rigorous な形で明らかになった。

(2) 上記の評価により、non-cutoff ボルツマ

ン方程式は、空間一様な（時間と速度のみを独立変数とする）場合は熱方程式の速度変数によるラプラス作用素をその分数べきに置き換えた方程式とみなすことができ、また、空間非一様な場合は、コルモゴロフ方程式について同様な置き換えをしたのものであると、粗く述べることができる。実際、Desvillettes, Wennberg (2004) は、一部形式的な議論を含むものの、劣楕円型評価から空間一様な non-cutoff ボルツマン方程式について初期値問題に対して熱方程式と同様な解の平滑効果が起こることを示した。

(3) Alexandre, Safadi (2005) は、空間一様なボルツマン方程式に対する上記の結果を、

Littlewood-Paley 分解などの調和解析の方法を用いて数学的に rigorous な形で導いた。また、同様な調和解析の手法により、衝突積分項の擬微分作用素としての上からの精密な評価が Alexandre(2006)により与えられた。(4)空間非一様な場合、non-cutoff ボルツマン方程式を退化楕円型方程式の典型例であるコルモゴロフ方程式の類似物として捉えて解の regularity を考察する試みは、Bouchut(2002)を除いて多くの結果は得られていなかった。

(4) 衝突積分項の下からの劣楕円型評価が明らかになる以前に、non-cutoff ボルツマン方程式の初期値問題の解を Gevrey 関数空間、解析関数空間で構成した鶴飼正二(1984)の先駆的結果を除き、空間非一様な場合の古典解の存在は未解決であった。

## 2. 研究の目的

(1)空間非一様な non-cutoff ボルツマン方程式の線形近似モデルとして

$$D_t f + v \cdot D_x f - i a(x, v) (-\Delta_v)^s f = 0, \quad a(x, v) > a_0 > 0$$

を考察し Hoermander Lie bracket 条件による時間変数  $t$ , 空間変数  $x$  に関する劣楕円型評価式の導出を解の大域的な性質を考慮して速度変数  $v$  の多項式増大度を加味したソボレフ空間で行う。

(2)上記の時間、空間変数に関する劣楕円型評価を得るために、ラプラス作用素  $-\Delta_v$  の場合に知られている”Fefferman の不確定性原理”をラプラス作用素の分数べきの場合に拡張する。更にボルツマン方程式の安定解である Maxwellian (Gauss 関数)  $M(v)$  の周りでの線形近似方程式

$$D_t f + v \cdot D_x f = iQ(M, f), \quad Q \text{ 衝突積分項}$$

についてその解の平滑効果を退化楕円型作用素の準楕円性の研究で用いられた擬微分作用素などの超局所解析 (microlocal analysis) 理論により示す。

(3) 衝突積分項 (collision term) の上と下からの評価で鍵となる、衝突積分項と解  $f$  との  $L^2$  内積に対して成立する Bobylev identity ( $L^2$  関数とそのフーリエ変換について成立する Plancherel 型公式)を、超局所解析の立場から捉え直し評価の改良を行う。

(4)退化楕円型作用素の準楕円性を示す際に用いる擬微分作用素の尺度関数と衝突積分核との交換子 (commutator) の考察から、解の無限回微分可能性は衝突積分項が対数オーダー程度の弱い楕円性  $(\log(1-\Delta_v))^r, r > 1$  を持てば従うことが予想される。一方、分数べきの楕円性を持てば、分数べきに応じた Gevrey 関数空間に解がぞくすることが予想される。この観点から、空間一様な non-cutoff ボルツマン方程式の解の平滑効果について、Desvillettes, Wennberg と

Alexandre, Safadi の先行結果を検討する。

(5)上記で得られた、non-cutoff ボルツマン衝突積分項に関する超局所解析理論を用いて空間非一様な非線形 non-cutoff ボルツマン方程式の解の平滑効果を弱解より少し強い微分可能性と速度変数に関する遠方での多項式オーダーの減少を仮定して導く。また仮定をみたく古典解の存在を示す。

## 3. 研究の方法

(1) 代表者と分担者浅倉史興氏は、ボルツマン方程式の離散化モデルに対する J.-M. Bony の結果と関連する最近の研究動向について研究討論を行うとともに、国内外の関連する研究者と情報交換を行った。浅倉氏は非線形双曲型保存則系の豊富な研究経験と知識からボルツマン方程式の解の保存則と、ボルツマン方程式の導出に關して的確な助言を与えた。分担者上木直昌氏は、non-cutoff ボルツマン方程式に関する確率解析の研究論文を解説した。特に、空間一様な、non-cutoff ボルツマン方程式で積分核が粒子の相対速度によらない場合 (Maxwellian molecule type) の初期値問題の一意性に関する、H. Tanaka, Toscani-Villani の確率解析による結果の解説は解析的な一意性の証明と比較する上で参考になった。

(2) 代表者と研究協力者 Chao-Jiang Xu 氏は各年度、数週間にわたる京都大学における共同研究の機会をもった。また研究協力者 Tong Yang、鶴飼正二両氏は京都大学におけるこの共同研究に各年度 1 週間程度参加し、大型黒板を用いて集中討論を行い、さらに黒板上の討論結果を記録した画像ファイルを元に e-mail により共同研究を深化させた。研究協力者 Radjesvarane Alexandre 氏は 2008 年度に京都大学における共同研究に参加した。代表者とすべての研究協力者はフランスにおける共同研究、香港城市大学 (City University of Hong Kong) おける数度の共同研究の機会をもった。また横浜市在住の鶴飼正二氏と、代表者は京都大学の東京駅連絡事務所を利用して研究討論を定期的に行った。

## 4. 研究成果

研究目的(1)で述べた線形近似モデルについて劣楕円型評価を  $s > 1/3$  の場合に、退化楕円型作用素の解析で用いる Lie bracket の方法で示し、解の滑らかさを非線形の外力項がついた方程式まで含めて明らかにした (発表論文⑦)。s が 1/3 以下の場合、このような方法では変数  $t, x$  に関する劣楕円型評価は得ることができないので、目的(2)で述べた一般化された不確定性原理を拡張し、non-cutoff ボルツマン方程式の Maxwellian

$M(v)$  の周りでの線形近似方程式について解の平滑効果を示した(発表論文⑥)。論文⑥では不確定性原理については、ラプラス作用素をその分数べき、更には対数オーダーの弱い楕円性にまで拡張したが、non-cutoff ボルツマン方程式のモデルとしては衝突積分核が粒子の相対速度によらない Maxwellian molecule type でかつ、弱い特異性をもつ場合 ( $s < 1/2$ ) であった。論文④では、目的(4)で述べた Desvillettes 等の空間一様な non-cutoff ボルツマン方程式に関する先行結果を、擬微分作用素論など超局所解析の立場から検討し、Maxwellian molecule type の場合には、Villani によって得られたすべての弱解について平滑効果がおこることを示した。この方法では、対数オーダー程度の弱い楕円性 ( $\log(1-\Delta_v)^r, r > 1$ ) があれば良く、そのような楕円性を与えるモデルは、2粒子間の斥力が Debye-湯川ポテンシャルに従う場合に導かれることを示した。また、ラプラス作用素の分数べきの楕円性があるときは、Gevrey 関数空間の平滑効果が予想されることを考慮して Maxwellian  $M(v)$  の周りでの線形近似方程式に対して Gevrey 平滑効果を示した。更に論文⑤では、目的(3)で述べた、ボルツマン衝突積分項の上と下からの評価の改良を行い、空間一様な non-cutoff ボルツマン方程式について、積分核が2粒子の相対速度による場合についても、解の平滑効果がおこることを示した。ただし、技術的な理由から相対速度が0になる特異性を修正したモデル(modified hard potential case)を対象としている。論文⑤で得た衝突積分項の評価と、論文⑥で開発された不確定性原理を用いて、目的(5)で述べた空間非一様な非線形 non-cutoff ボルツマン方程式の解の平滑効果を弱解より少し強い微分可能性と速度変数に関する遠方での多項式オーダーの減少を仮定して導くことに成功した(論文①)。また、上の条件をみたく時間局所解の存在を、積分核が弱い特異性 ( $s < 1/2$ ) をもつ場合に示した。得られた局所解は、Gauss 関数程度の速度変数に関する減少オーダーをもつ解のクラスで一意的である。積分核が強い特異性をもつ場合の局所解の存在、大域解の存在、衝突積分核の相対速度に関する特異性の処理などは今後に残された課題である。論文③では、non-cutoff ボルツマン方程式の積分核の特異性が最大になった場合のモデルとして考えられるランダウ方程式について、その解の滑らかさについて解析性よりも強い超解析性が示された。結果は空間に一様、Maxwellian molecule type な場合であるが、熱方程式の解がもつような性質であり、衝突積分核が強い特異性をもつ場合に、non-cutoff ボルツマンについても期待できる性質で興味深い。また、論文②で線形退化

楕円型作用素とボルツマン方程式などの非線形偏微分方程式との定性的な類似性を検証する観点から、ある種の Lie-bracket 条件をみたく準線形偏微分方程式についてその実解析解が無限回微分可能な関数空間では不安定であることを明らかにした。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu and T. Yang, Regularity of solutions for Boltzmann equation without angular cutoff, to appear in C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 査読有
- ② N. Lerner, Y. Morimoto and C.-J. Xu, Instability of the Cauchy - Kovalevskaya solution for a class of non-linear systems, to appear in American Journal Mathematics, 査読有
- ③ Y. Morimoto and C.-J. Xu, Ultra-analytic effect of Cauchy problem for a class of kinetic equations, Journal of Differential Equations, 247, 596-617, 2009, 査読有
- ④ Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu and T. Yang, Regularity of solutions to the spatially homogeneous Boltzmann equation without angular cutoff, Discrete and Continuous Dynamical Systems -Series A, 24, 187-212, 2009, 査読有
- ⑤ Z. Huo, Y. Morimoto, S. Ukai and T. Yang, Regularity of solutions for spatially homogeneous Boltzmann equation without angular cutoff, Kinet. Relat. Models, 1, 453-489, 2008, 査読有
- ⑥ R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu and T. Yang, Uncertainty principle and kinetic equations, J. Funct. Anal. 255, 2013-2066, 2008, 査読有
- ⑦ Y. Morimoto and C.-J. Xu, Hypo-ellipticity for a class of kinetic equations, J. Math. Kyoto. Univ., 47, 129-152, 2007, 査読有

[学会発表] (計 12 件)

- ① Y. Morimoto, Some remarks on Ukai local solutions in Gevrey classes to the nonlinear Boltzmann equation without cutoff, International Conference on kinetic and related models, 2009年4月4日, Wuhan University, 中国
- ② Y. Morimoto, Estimates for Boltzmann

- collision operators, 偏微分方程式第24回松山キャンプ, 2009年3月14日, 山口大学
- ③ Y. Morimoto, Microlocal analysis on non-cutoff Boltzmann equation, 偏微分方程式姫路研究集会, 2008年2月20日, 姫路市国際交流センター
- ④ Y. Morimoto, Ultra-analytic smoothing effect for a class of kinetic equations, The international conference on conservation laws and kinetic equations, 2008年12月15日, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, 中国
- ⑤ Y. Morimoto, Regularity for solutions to Boltzmann type equation in non-Maxwellian molecule case without Cutoff, Series of lectures associated with : The third International Conference on the Boltzmann equation and related topics, 2008年10月14-17日, Central China University, Wuhan, 中国
- ⑥ Y. Morimoto, Estimates for non-cutoff Boltzmann collision term and its application, The third International Conference on the Boltzmann equation and related topics, 2008年10月12日, Central China University, Wuhan, 中国
- ⑦ Y. Morimoto, Regularity of solutions for spatially homogeneous Boltzmann equation without angular cutoff (non Maxwellian molecule type), Mathematical Analysis in Fluid and gas dynamics, RIMS 研究集会, 2008年7月11日, Kyoto University
- ⑧ Y. Morimoto, Microlocal analysis on the regularity of Boltzmann type equations, "The 9<sup>th</sup> Northeastern Symposium on Mathematical Analysis", 2008年2月22日, Hokkaido University
- ⑨ Y. Morimoto, Uncertainty principle and regularity of solutions for Boltzmann type equations, International Symposium "Function Spaces and Partial Differential Equations" 2008年2月18日, Osaka University
- ⑩ Y. Morimoto, The collision kernel for Debye-Yukawa potential and the regularity of solutions to spatially homogeneous Boltzmann equation, Fourth Pacific Rim Conference on Mathematics, 2007年12月10日, City University of Hong Kong, 香港
- ⑪ Y. Morimoto, The Uncertainty principle of Fefferman-Phong for fractional and logarithmic order,

Clay Mathematical Institute Workshop: Solvability and Spectral Instability, 2007年、9月21日, Boston, 米国

- ⑫ Y. Morimoto, The Uncertainty principle of Fefferman-Phong for fractional or logarithmic order, Seminar hebdomadaire 2006-2007, 2007年3月29日, Rouen University, 仏

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

森本 芳則 (MORIMOTO YOSHINORI)  
京都大学・大学院人間・環境学研究所・教授  
研究者番号：30115646

### (2) 研究分担者

上木 直昌 (UEKI NAOMASA)  
京都大学・大学院人間・環境学研究所・准教授  
研究者番号：80211069  
浅倉 史興 (ASAKURA FUMIOKI)  
大阪電気通信大学・工学部・教授  
研究者番号：20140238  
2006～2007年度

### (3) 連携研究者

浅倉 史興 (ASAKURA FUMIOKI)  
大阪電気通信大学・工学部・教授  
研究者番号：20140238  
2008年度

### (4) 研究協力者

鵜飼 正二 (UKAI SEIJI)  
東京工業大学・名誉教授  
City University of Hong Kong・客員教授  
2006～2007年度

ALEXANDRE RADJESVARANE  
French Naval Academy・教授 フランス

XU CHAO-JIANG  
Rouen 大学・数学科・教授 フランス

YANG TONG  
City University of Hong Kong・数学科・教授 香港