

平成21年 6月 5日現在

研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18540215
 研究課題名（和文） 特異磁場をもつパウリおよびディラック作用素のスペクトルの研究
 研究課題名（英文） Study of the spectrum of the Pauli and Dirac operators with singular magnetic field
 研究代表者
 岩塚 明 (IWATSUKA AKIRA)
 京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授
 研究者番号：40184890

研究成果の概要：

3次元空間におけるトーラス内に台をもつ磁場をもつシュレディンガー作用素が、トーラスの厚みを薄くしたときに、磁場のベクトルポテンシャルをうまく選ぶことにより、特異性をもつ磁場をもつシュレディンガー作用素のフリードリックス拡張で定まる自己共役作用素にノルムレゾルベントの意味で収束することを示した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,300,000	0	1,300,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	630,000	4,030,000

研究分野：作用素論

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：(1) 関数解析学 (2) 関数方程式論 (3) 数理物理 (4) スペクトル理論
 (5) 散乱理論

1. 研究開始当初の背景

(1) アハラノフ・ボーム効果についてシュレディンガー作用素の散乱や定数磁場からの摂動として無限に多い点磁場をもつ場合のスペクトルの研究が進んでいた。しかし3次元空間内で特異性をもつ磁場については余り研究が進んでいなかった。特に物理的にアハラノフ・ボーム効果を示すためには3次元空間内の線的なソレノイドにより生成される磁場がある場合のこれらの作用素の研究は非常に重要と考えられていた。

(2) 研究代表者および連携研究者の田村英男

教授は、パウリ作用素の固有値のスペクトルの端における漸近分布を調べた。引き続きこの結果をシュレディンガー作用素に応用する場合を研究し、固有値の漸近分布について理解を深めた。

(3) 南部陽一郎, P. Exner, P. Stovicek, P. Vytras による定数磁場に一つの点磁場を付け加えたときのシュレディンガー作用素のスペクトルの研究をはじめとして、連携研究者の峯拓矢の研究により定数磁場に複数個(無限個を含む)の点磁場を付け加えたときのスペクトルの研究が進んでいた。

(4) 連携研究者の田村英男は、伊藤宏との共同研究でいくつかの点磁場を持つ場合のシュレディンガー作用素の散乱振幅の研究(2003)や、ディラック作用素の点磁場をもつ場合のレゾルベントの収束についての結果(2003, 2004)を得た。このように特異性をもつ磁場をもつシュレディンガー作用素、ディラック作用素のスペクトル・散乱理論的な研究が進んでいるが、3次元空間で線的な特異性をもつような磁場、特に円環状な台をもつような磁場についての数学的に厳密な研究は余りなされていなかった。

(5) 田村教授は磁束がディラックのデルタ関数的になっている場合、シュレディンガー作用素のスペクトル構造について研究し、散乱振幅の計算などを進め、デルタ関数的な磁束をもつシュレディンガー作用素のスペクトル構造について理解を深めていた。また田村教授はディラック作用素のレゾルベントが、特異磁場をもつものが、特異性のない磁場でどのように近似できるかについての研究結果を得ていた。

2. 研究の目的

無限に細いソレノイドによって生成される磁場は、2次元平面ではアハラノフ・ボーム磁場あるいは点磁場と呼ばれるデルタ関数的な特異性を持つ磁場、3次元以上の空間内では線上に特異性をもつ磁場となる。このような特異性をもつ磁場をもつパウリ作用素およびディラック作用素のスペクトルについて、定数磁場(ゼロ磁場も含む)からの摂動項をもつ場合、特に3次元空間で円環状に磁場がある場合に、スペクトルの型、ランダウ・レベルの固有空間の重複度およびランダウ・レベルの周りの固有値の漸近挙動などについて研究することを目的とする。またポワソン型のランダムな配置をもつ点磁場などの場合にも、スペクトルがどうなるかについて研究することを目的とする。

3. 研究の方法

(1) 研究代表者は、従来の結果について連携研究者に周知させ、全体の研究の統括をする。

① 全員で、3次元のソレノイド的な線状の特異性をもつ磁場、特に円環状な台をもつ磁場をもつ場合の各作用素についてスペクトルの研究を進めた。

② パウリ作用素について定数磁場からの摂動を考えて特異磁場を持つ場合にランダウ準位の周りでの固有値の漸近挙動がどうなるかを田村、峯と共同で研究した。

④ ディラック作用素について、どのような性質が成り立つか、大鍛治、山田、島田の協力を得て研究した。

(2) 研究代表者は、数理解析研究所において長年に渡り作用素論セミナーをほぼ週1回の割合で竹井義次助教授とともに主催し、多くの内外の研究者を招いて最新の研究成果について共同で研究をしてきた。

① 峯、山田、大鍛治、島田はほとんど毎回このセミナーに参加し、また田村も数回に1回程度の割合でセミナーに参加し、自らの研究成果を発表し、また各講演に対して議論に参加し、また講演者の選定など運営に協力した。

② この補助金の経費により、このセミナーの枠組みで当該研究課題に関連する研究を行っている内外の研究者を招いて、研究成果の発表を行ってもらい、討議し研究をすすめた。

(3) 研究代表者は長年に渡り、主催者として年に1度夏の作用素論シンポジウムを開催し、日本各地の関数解析・偏微分方程式論の研究者が集まって、数理物理に現れる作用素のスペクトル・散乱理論に関する最新の成果について意見交換を行ってきた。平成18、19、20年度も同様のシンポジウムを開催して最新の研究成果について討議し意見交換をおこなった。

(4) 研究代表者は平成18年9月にプラハで、平成19年9月ルーマニアで、それぞれ開催された数理物理の国際研究集会に参加し最新の成果について討議し情報収集を行った。平成20年7月にマルセイユでの国際研究集会で本研究の成果について発表を行い、情報収集を行った。

4. 研究成果

(1) 研究代表者は、連携研究者の峯拓矢、島田伸一とともに、3次元空間におけるトーラス内に台をもつ磁場をもつシュレディンガー作用素がトーラスの幅を縮めたときに、磁場のベクトルポテンシャルをうまく取れば特異性をもつ磁場をもつシュレディンガー作用素のフリードリックス拡張で定まる自己共役作用素にノルムレゾルベント収束することを示した。またこの結果をトーラス内に台をもつ任意の回転不変な磁場に対するシュレディンガー作用素がノルムレゾルベントの意味で同じ作用素に収束することを示した。外村彰によりアハラノフ・ボーム効果を検証するため行われた世界的に有名な物理的な実験は、3次元のトーラスに閉じこめられた磁場を用いたものであり、その数学的なモデルに関する世界で初めて結果を与えており、このモデルの研究は今後の発展が大いに期待される。また本研究で開発された証明の手法は今後の研究を進める上で大いに役立つものと考えられる。

(2) 連携研究者の田村英男は複数個のソレノイド磁場による散乱において、散乱振幅、散乱全断面積、散乱位相などの散乱理論における基本的な物理量の漸近公式を導き、アハラノフ・ボーム効果の準古典漸近解析を展開した。

(3) 連携研究者の峯拓矢は主として2次元ユークリッド平面上のランダム δ 磁場を持つシュレディンガー作用素について、そのスペクトル、およびリフシツ・テイルについての研究を行った。

(4) 連携研究者の山田修宣は、ディラック作用素のスペクトル理論、特に遠方で発散するポテンシャルをもつ場合の非相対論的極限とスペクトル集中の関係およびレゾナンス、またブラックホール理論に現れるKerr-Neuman計量におけるディラック作用素のスペクトルについて研究した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11件)

①Takuya Mine, Yuji Nomura, The spectrum of Schroedinger operators with random delta magnetic fields, Annales de l'Institut Fourier 59-2 (2009), 659-689. (査読有)

②Takuya Mine, Yuji Nomura, Schroedinger operators with random delta magnetic fields, Mathematical Results in Quantum Mechanics, Proceedings of the QMath 10 Conference, World Scientific, 2008, 203-217. (査読有)

③Hideo Tamura, Semiclassical analysis for spectral shift functions in magnetic scattering by two solenoidal fields, Rev. Math. Phys. 20 (2008), 1249-1282. (査読有)

④Hideo Tamura, Time delay in scattering by potentials and by magnetic fields with two supports at large separation, J. Funct. Anal. 254 (2008), 1735-1775. (査読有)

⑤Hideo Tamura, Semiclassical analysis for magnetic scattering by two solenoidal fields: total cross sections, Ann. Henri Poincare 8 (2007), 1071-1114. (査読有)

⑥伊藤宏, 山田修宣, A note on the nonrelativistic limit of Dirac operators and spectral concentration, 数理解析研究所講究録 1563 「スペクトル散乱理論とその周辺」, 2007年6月, 162-171. (査読無)

⑦Kazunori Ando, Akira Iwatsuka, Masahiro Kaminaga, Fumihiko Nakano, The spectrum of Schroedinger operators with Poisson type random potential, Ann. Henri Poincare 7-1 (2006), 145-160. (査読有)

⑧Takuya Mine, Yuji Nomura, Periodic Aharonov-Bohm solenoids in a constant magnetic field, Rev. Math. Phys. 47-10 (2006), 913-934. (査読有)

⑨Monica Winklemeier, Osanobu Yamada, Spectral analysis of radial Dirac operators in the Kerr-Neuman metric and its applications to time periodic solutions, J. Math. Phys. 47-10 (2006), 1-17. (査読有)

⑩Hiroshi T. Ito, Hideo Tamura, Semiclassical analysis for magnetic scattering by two solenoidal fields, J. London Math. Soc. 8 (2006), 695-716. (査読有)

⑪Takashi Ichinose, Hideo Tamura, Exponential product approximation to the integral kernel of the Schroedinger semigroup and to the heat kernel of the Dirichlet Laplacian, J. Reine Angew. Math. 8 (2006), 695-716. (査読有)

[学会発表] (計 5件)

①田村英男, 磁場散乱におけるアハラノフ・ボーム効果に対する純子点漸近解析, 日本数学会2009年度年会特別講演, 2009年3月26日, 東京大学.

②Akira Iwatsuka, Norm resolvent convergence to Schroedinger operators with singular magnetic fields supported by a circle in \mathbb{R}^3 , Schroedinger Equation and Related Topics, January 6th 2009, 東京大学数理解析研究所.

③伊藤宏, 山田修宣, On the nonrelativistic limit of Dirac potentials diverging at infinity, スペクトル散乱理論とその周辺, 2008年12月5日, 京都大学数理解析研究所.

④Takuya Mine, Norm resolvent convergence of to Schroedinger operators with infinitesimally thin toroidal magnetic fields, Spectral and Scattering Theory for Quantum Magnetic Systems, July 8th 2008, CIRM, Marseille, France.

⑤ Takuya Mine, Schroedinger operators with random delta magnetic fields, 10th Quantum Mathematics International Conference, September 12th 2007, Moeciu, Romania.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岩塚 明 (IWATSUKA AKIRA)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授
研究者番号：40184890

(2) 研究分担者

田村 英男 (TAMURA HIDEO)
岡山大学・自然科学研究科・教授
研究者番号：30022734

峯 拓矢 (MINE TAKUYA)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・
准教授
研究者番号：90378597

大鍛治 隆司 (OKAJI TAKASHI)
京都大学・理学研究科・准教授
研究者番号：20160426

山田 修宣 (YAMADA OSANOBU)
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号：70066744

島田 伸一 (SHIMADA SHINICHI)
摂南大学・工学部・准教授
研究者番号：40196481

(注) 研究分担者は、2008 年度には全て連携研究者となった。

(3) 連携研究者

田村 英男 (TAMURA HIDEO)
岡山大学・自然科学研究科・教授
研究者番号：30022734

峯 拓矢 (MINE TAKUYA)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・
准教授
研究者番号：90378597

大鍛治 隆司 (OKAJI TAKASHI)
京都大学・理学研究科・准教授
研究者番号：20160426

山田 修宣 (YAMADA OSANOBU)
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号：70066744

島田 伸一 (SHIMADA SHINICHI)
摂南大学・工学部・准教授
研究者番号：40196481