

平成 21 年 2 月 18 日現在

研究種目：基盤研究 (C)
 研究期間：2006-2008
 課題番号：18540216
 研究課題名（和文） 正則写像半群、バンドル上の複素力学系、およびランダムな複素力学系の研究
 研究課題名（英文） Research of rational semigroups, complex dynamics on fiber bundles, and random complex dynamics
 研究代表者
 角 大輝 (SUMI HIROKI)
 大阪大学・大学院理学研究科・准教授
 研究者番号： 40313324

研究成果の概要： 有理関数や多項式の族により生成された半群のリーマン球面上での力学系と、ランダムな複素力学系、ジュリア集合などのフラクタル図形に関する幾何学、などについて、それらを互いに交錯させながら基礎から理論を構築した。このことにより、一つの正則写像を反復合成させる従来の複素力学系では現れないような興味深い現象を数多く発見した。そしてこれらの現象の背景とメカニズムを深く研究した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	660,000	4,060,000

研究分野：複素力学系

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：解析学・複素力学系・カオス・フラクタル・ランダムな力学系

1. 研究開始当初の背景

複素多様体 M の上の正則写像からなる、写像の合成を積とする半群（これを正則写像半群とよぶ）の、 M への作用を考える。特に、 M がリーマン球面の場合の上記の半群を有理半群とよぶ。有理半群のリーマン球面上での力学系の研究は、一つの有理写像の反復合成を調べる従来の複素力学系の一般化であり、1990年代はじめに、A. Hinkkanen, G. J. Martin, F. Ren らによって研究されたのが最初である。私は彼らと独立に、有理半群の力学系が研究対象になることに気づき、1994年頃から研究に着手した。また、有理半

群の力学系の研究に類似のものとして、ランダムな複素力学系がある。これは1990年代はじめに、Fornaess, Sibony らによって調べられたのが最初であり、その後、2005年までに、ドイツのグループ Bruck, Buger, や中国の Ren の後継グループらによって研究がされていた。しかしながら、2005年までは、有理半群の力学系とランダムな複素力学系を結びつけて研究する者は皆無であった。なおもとの複素力学系は、数理生物学における、生物の個体数変動の記述モデルなどが動機のひとつとなっており、ランダムな複素力学系はこの観点からして数学以

外の分野への応用として大変重要であると思われる。

2. 研究の目的

1で述べたような有理半群の力学系とランダムな複素力学系、さらに反復関数系の力学系のアイデア、これら複数の領域を互いに交錯させながら、全てを同時に発展させることが大きな目的である。これらの分野はそれぞれ数理モデルなどで重要であり、互いに関連付けて調べることで深い結果を見出す。これら複数の領域を交錯させて同時発展させることによって、新しい興味深い現象を発見し、そのメカニズムを追求することができるようになる。このことにより、カオス、フラクタルというキーワードで語られてきた分野に新しい知見をもたらす、ひいては数理学全体に新しい視点を提供するということが究極の目的となる。

3. 研究の方法

(1)有理半群、ランダムな複素力学系、反復関数系、など複数の理論をそれぞれ交錯させながら、全てを同時に発展させる。道具立てとしては、複素解析、エルゴード理論、ポテンシャル論、コホモロジー理論、などである。

(2)R. Stankewitz 氏と多項式半群の力学系について共同研究を行った。その際、互いの所属大学を訪問し、また世界各地で行われる研究集会などで会い、アイデアを発展させた。

(3) M. Urbanski 氏と有理半群のジュリア集合のハウスドルフ次元について共同研究を行った。その際、互いの所属大学を訪問し、また世界各地で行われる研究集会などで会い、アイデアを発展させた。

(4)国内外の様々な研究集会に参加し、最新の知識を得た。またこれらの研究集会においてこれまで得た結果を発表し、その反応により結果をさらに発展させていった。

(5)高性能ノートパソコンを購入し、ジュリア集合や複素平面上の特異関数のグラフのグラフィクスを作成し、研究に役立て、発表時のプレゼンテーションに役立てた。

4. 研究成果

(1)多項式半群のなかで、臨界値集合が有界なものが研究対象として重要であることを発見し、このクラスにおいてジュリア集合が非連結になりうること、なった場合にはジュリア集合の連結成分らは、内側から外側へ順にならぶような順序性を持つことなど興味深い現象を数多く発見した。また、一つの多項式の反復合成では起こりえない現象を数

多く発見した。例えば、(a)任意に与えた自然数 n に対し、臨界値集合が有界な有限生成多項式半群で、そのジュリア集合の連結成分の個数がちょうど n になるものが存在することや、(b) 臨界値集合が有界な有限生成多項式半群で、そのジュリア集合の連結成分の個数がちょうど可算になるものが存在することを示した。さらにこれらの個数についてはあとの(3)で述べる新しいコホモロジーを使って調べた。

(2)有理半群 G について「核ジュリア集合」というものを定義し、それが空になる場合に、付随するランダムな力学系については確率測度の空間の上で推移作用素の随伴による力学系がカオス的な部分(ジュリア集合という)を持たないこと(協調原理)を発見し詳しく調べた。この場合、連続関数の空間上で推移作用素を考えると、絶対値が1の固有値に対応する固有関数で張られる空間 A の次元が有限であることを示した。また、推移作用素の軌道が0に収束するような初期関数で張られる空間を B とすると、連続関数の空間は A と B の直和になることを示した。さらに、この A の各元は、半群 G のファトウ集合(穏やかな初期値集合)の各連結成分上では定数であることも示した。上記の仮定のもと、さらにある条件を課すと G のジュリア集合のハウスドルフ次元が真に2より小さくなるので、この場合は、 A の各元は、リーマン球面全体で連続なのに、非常に細かいフラクタル集合のなかだけで変化することとなる。さらにもう一つある条件を課したとき、 A の各元は半群 G のジュリア集合の(ある確率測度に関して)ほとんど全ての点で微分が出来ないことを示した。 A の各元は、実関数論で研究されている「特異関数」の複素平面上版とみなせる。以上のようにして、有理半群の理論、ランダムな複素力学系の理論などを同時に扱い、それぞれを発展させた。しばらくは基礎理論の発展を考えることが重要であると思われる。多くの新しい結果と興味深い新現象が発見されることが予想される。

(3)ランダムな多項式力学系で双曲的なものを分類し、そのうちの一つのクラスでは通常多項式力学系では絶対に起こらない現象が起きることを発見し、そのメカニズムを考察した。

(4)有限生成半群について、半群の各元の相互作用を表すコホモロジーを新たに定義し、その性質を調べいくつか半群の

力学系に応用した。特に、(1)のなかのような臨界値集合が有界な多項式半群の力学系への応用と、「前方不分岐」という条件を満たす反復関数系でのコホモロジーの計算を行った。フラクタル幾何学、とくに反復関数系においてコホモロジーを使うというアイデアは全く斬新なものであり、今後の発展が期待される。

(5)R. Stankewitz 氏と臨界値集合が有界な多項式半群の力学系について詳しく研究し、そのジュリア集合の特徴などを記述することができた。

(6)M. Urbanski 氏と有限生成有理半群のジュリア集合のハウスドルフ次元について共同研究を行い、双曲性を仮定した場合、上記の次元は写像の摂動に関して実解析的であることを示した。また、双曲性を弱めたクラスにおいて、開集合条件を仮定すると、ジュリア集合のハウスドルフ次元が半群のポアンカレ級数の臨界指数と一致することを示した。これらは従来の複素力学系と反復関数系の両者を同時に統一的に扱うような仕事となった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

(1)H. Sumi and M. Urbanski, The equilibrium states for semigroups of rational maps, Monatsh. Math. に掲載予定、査読有

(2) H. Sumi and M. Urbanski, Real analyticity of Hausdorff dimension for expanding semigroups, Ergod. Th. and Dynam. Sys. に掲載予定、査読有

(3) 角大輝、「有理半群、ランダムな複素力学系と複素平面上の特異関数」、日本数学会雑誌「数学」論説 2009 年 4 月号掲載予定。査読有

(4)M. Roy, H. Sumi and M. Urbanski, Analytic families of holomorphic iterated function systems, Nonlinearity 21 (2008) 2255-2279. 査読有

(5)H. Sumi, Random dynamics of polynomials and devil's-staircase-like functions in the complex plane, Appl. Math. Comput. 187 (2007), no. 1, 489--500. 査読無

(6)R. Stankewitz and H. Sumi, Structure of Julia sets of polynomial semigroups with bounded finite postcritical set, Appl. Math. Comput. 187 (2007), no. 1, 479--488.

査読無

(7)H. Sumi, The space of postcritically bounded 2-generator polynomial semigroups with hyperbolicity, 数理解析研究所講究録 1494, 2006, pp 62-86. 査読無

(8)H. Sumi, Random Julia sets that are Jordan curves but not quasicircles, 数理解析研究所講究録 1537「複素力学系とその周辺」1-32, 2007 年 2 月 査読無

(9)H. Sumi, Semi-hyperbolic fibered rational maps and rational semigroups, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (2006), {b 26}, 893-922 査読有

[学会発表] (計 15 件)

(1) H. Sumi, Random complex dynamics and singular functions on the complex plane, University of Bath (Bath, イギリス) 研究集会 UK-Japan Winter School Dynamics and Complexity, 2009 年 1 月 8 日

(2) H. Sumi, 「The space of postcritically bounded 2-generator polynomial semigroups with hyperbolicity」, 研究集会 Moduli and invariants in complex analysis and algebraic geometry, 2008 年 11 月 2 7 日

(3) H. Sumi, タイトル 「Random complex dynamics and singular functions on the complex plane」, Fudan University (上海、中国) 研究集会 Complex dynamics and related topics, 2008 年 11 月 1 日

(4) H. Sumi タイトル 「Random complex dynamics and singular functions on the complex plane」, Jacobs University Bremen (ドイツ) 研究集会 Aspects of Transcendental Dynamics, 2008 年 6 月 18 日

(5) 角大輝, タイトル 「Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps」 2007 年度冬の力学系研究集会 日本大学軽井沢研修所 2008 年度 1 月 5 日-8 日

(6) 角大輝, タイトル 「ランダムな複素力学系、有理半群と複素平面上の特異関数」 研究集会 「力学系と微分方程式」 広島大学 2007 年 11 月 9 日

(7) 角大輝, タイトル 「Random complex dynamics and rational semigroups」 2007 年 9 月 研究集会 「複素力学系とその周辺分野の研究」 京都大学数理解析研究所

(8) H. Sumi , タイトル「Classification of polynomial semigroups and random Julia sets that are Jordan curves but not quasicircles」、
15th International conference of finite and infinite dimensional complex analysis and applications,
2007年7月 大阪市立大学

(9) H. Sumi, Random dynamics of polynomials and singular functions in the complex plane」, AMS meeting Special session Complex Dynamics and Complex Function Theory, Miami University (アメリカ),
2007年3月16日

(10) 角大輝 , タイトル「Random Julia sets that are Jordan curves but not quasicircles」, 力学系研究集会 2007年1月6日 東京大学数理科学研究科

(11) 角大輝 , タイトル「Random Julia sets that are Jordan curves but not quasicircles」,
研究集会「複素力学系とその周辺」、
京都大学数理解析研究所、2006年10月2日

(12) 角大輝 , タイトル「有理半群、ランダムな複素力学系と複素平面上の特異関数」
日本数学会 函数論分科会特別講演
2006年9月20日 大阪市立大学

(13) 角大輝 , タイトル「Random dynamics of polynomials and singular functions in the complex plane」,
2006年9月 Mathematics on Fractals 2006
京都大学

(14) 角大輝 , タイトル「Dynamics of polynomial semigroups, interaction cohomology and singular functions in the complex plane」, 第53回トポロジーシンポジウム 大阪市立大学、2006年8月8日

(15) H. Sumi , 「Random dynamics of polynomials and devil's-staircase-like functions in the complex plane」,
University of Victoria (カナダ)
INTERNATIONAL SYMPOSIUM
Analytic Function Theory, Fractional Calculus and Their Applications」
2005年8月

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
○出願状況(計 0 件)

○取得状況(計 0 件)

〔その他〕
主な研究論文や雑誌への掲載予定論文、投稿中論文などはホームページ
<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sumi/welcomeou-j.html>
にある。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

角 大輝

大阪大学大学院・理学研究科・准教授
40313324

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者