様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月２０日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006～2009
課題番号：１８５４０２１９
研究課題名（和文）　幾何学的変分問題の解の特異点に関する不変量と均衡条件

研究課題名（英文）　Invariants and balancing conditions for singularities of solutions of geometric variational problems

研究代表者
加藤　信（KATO SHIN）
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：１０２４３３５４

研究成果の概要（和文）：３次元ユークリッド空間内の極小曲面の内、n 端懸垂面と呼ばれる重要なクラスについて、特に種数０の場合の曲面の崩壊を、端対の相対ウェイトを用いて分析した。また、これと並行して、種数０では既に完了していた存在条件の定式化を種数１の場合に一般化し、さらに、関連が非常に強いと考えられる３次元ローレンツ空間内の極大曲面についても、上記の一般化を行うと共に、曲面の対称性と特異点集合との関係についても分析した。

研究成果の概要（英文）：We analize the collapse of n-end catenoids of genus 0, a significant class of minimal surfaces in the Euclidian 3-space, by means of the relative weights of end-pairs of the surfaces. On the other hand, we generalize the formulation of the existence condition of n-end catenoids in the case of genus 0 to the case of genus 1. Moreover, we also generalize the formulation to the case of maximal surfaces in the Lorentzian 3-space, and furthermore, analize the correspondence between the symmetry of maximal surfaces and the singular set.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	900,000	0	900,000
２００７年度	800,000	240,000	1,040,000
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
２００９年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,300,000	720,000	4,020,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数物系科学
キーワード：多様体上の解析

１．研究開始当初の背景
　幾何学的変分問題の解において、特異点集合上の各点（或いは端）に与えられたある種の重みが、しばしば一定の均衡条件を満足していなければならず、言い換えればそれが満たされない場合には、解は存在せず、また均衡条件が破綻する方向に変形が加えられたとき、解（の与える多様体）は崩壊すると言うことは既によく知られていた。そして、一般に特異点集合（或いは端）がある意味で大きい（この大きさはこれまで主に、特異点の個数、特異点集合の次元、或いは端の体積増大度によって計られてきた）ときに、この重みを与える際の自由度が大きくなることが、

解の存在のための制約が比較的緩くなる要因の一つであった。

特に全曲率有限な完備極小曲面を考えると、これはコンパクトなリーマン面のユークリッド空間への特異点を持つはめ込みと見なすことが出来、この場合には特異点の像の近傍である各端において、フラックス・ベクトルと呼ばれるものが与えられ、それらの間にはフラックス公式と呼ばれる均衡条件がやはり要求されている。

代表者はリーマン面が球面の場合の、無限遠において与えられたディリクレ境界条件を満たすプラトー問題について、このフラックス公式との関わりから存在条件を代数方程式に書き直し、一般的存在定理、解の個数の評価、或いは特例的な非存在条件について、研究を重ねて来た。

そして、これまでの研究の中で、スカラー曲率の方程式の解に関する観察において見られたような、上記の重みが単独で意味をなすのではなく、各特異点相互の何らかの力関係に分解され得る、言い換えれば、他の特異点との関係でそこに重みが生ずると言う状況が、ここでも見られることに着目するに到った。そして、解の分離現象を始めとするいくつかの崩壊が、この重みを各特異点の対に分解して与えられる不変量により、捉えられることがわかった。

２．研究の目的

特異点（或いは端）に関連して均衡条件を制御する上述の不変量に注目し、これを用いて、極小曲面並びにスカラー曲率の方程式の解を始めとした幾何学的変分問題について、その解の分離現象を始めとする崩壊に関するより掘り下げた分析を行うことを目的とした。

３．研究の方法

三次元ユークリッド空間内の極小曲面における特にコンパクトなリーマン面が種数０（球面）の場合の、解（曲面）のふるまいの特異点（端）対のウェイトによるさらなる分析を行うとともに、種数１（トーラス）の場合への一般化を図り、また、関連が非常に強いと考えられる三次元ローレンツ空間内の極大曲面についても、さらなる分析を行い、一般化を図った。

定義域となるリーマン面のモジュライの構造と関連づけた分析について、タイヒミュラー空間論を初めとするリーマン面の理論を専門とする今吉洋一が、また、関連して興味深い現象が見られるローレンツ空間の場合については、数理物理に由来する微分幾何学の諸問題について取り組んで来た橋本義武が、また、リーマン多様体の崩壊と言う大きな観点から、加須栄篤が、それぞれサポートした。

また、関連する諸分野、諸研究課題の研究者との情報交換の場を設けるため、例年、研究集会「多様体上の微分方程式」を、加須栄篤（金沢大学・理工研究域数物科学系）内藤久資（名古屋大学・大学院多元数理科学研究科）両氏との協力の下に開催した。

開催時期並びに開催地は下記の通りである。

期間　2006 年 12 月６日(水)～８日(金)
会場　金沢大学サテライト・プラザ
　　　（金沢市西町３番丁 16 番地
　　　　金沢市西町教育研修館内）
　　　ＫＫＲホテル金沢
　　　（金沢市大手町２番丁 32 番地）

期間　2007 年 12 月 10 日(月)～12 日(水)
会場　いしかわシティカレッジ
　　　（金沢市広坂２丁目１ー１
　　　　石川県広坂庁舎１号館内）

期間　2008 年 12 月１日(月)～３日(水)
会場　いしかわシティカレッジ
　　　（同上）

期間　2009 年 10 月 28 日(水)～30 日(金)
会場　（財）富山勤労総合福祉センター
　　　呉羽ハイツ
　　　（富山県富山市吉作 4103-1）

４．研究成果

(1) ３次元ユークリッド空間内の極小曲面を特異点を持つ写像と考えたとき、特に定義域となるコンパクト・リーマン面の種数が０（球面）である場合の、特異点（端）対のウェイトと、解（曲面）のふるまい（特に曲面の崩壊）との関係について、本研究以前より行って来た分析をさらに進めた。より具体的に言うと、ｎ端懸垂面の非存在条件の、相対ウェイトを用いた分析の精密化を行った。

やや具体的に述べておくと、まず一般に、三次元ユークリッド空間内の極小曲面の、埋め込まれた端は平面または懸垂面に漸近し、そのフラックス・ベクトルは極限単位法ベクトルと平行である。その比を端のウェイトと呼ぶ。

種数０のｎ端懸垂面とは、球面からｎ個の点 $q_1, \cdots, q_n$ を除いた領域を定義域とし、これら除かれた点（の近傍）において懸垂面型の端を持つ極小曲面のことを言う。

各端 q_j のウェイト w_j は、

$$\Sigma_{k=1;k\neq j}^{n} w_{jk}=w_j \quad (j=1,\cdots,n),$$
$$w_{kj}=w_{jk} \quad (j\neq k)$$

を満たす端対 (q_j, q_k) の相対ウェイト w_{jk} に分解される。ｎ端懸垂面のワイエルストラス・データ

$g=P/Q$, $\eta=-Q^2dz$,

$Q=\Sigma_{j=1}{}^{n}\{b_j/(z-q_j)\}$, $P=\Sigma_{j=1}{}^{n}\{p_jb_j/(z-q_j)\}$,

を用いるならば、

$w_{jk}=b_jb_k(p_k-p_j)/(q_k-q_j)$

で与えられる。さらに、

$w_{jk}*=b_jb_k(\bar{p}_jp_k+1)/(q_k-q_j)$

を導入することにより、n 端懸垂面の存在条件は、

$\Sigma_{k=1;k\neq j}{}^{n}w_{jk}=w_j$,

$\Sigma_{k=1;k\neq j}{}^{n}w_{jk}*=0$　$(j=1,\cdots,n)$

と表すことができる。ここで、

$m_{jk}=\max\{|w_{jk}|,|w_{jk}*|\}$

とおいたものが、修正相対ウェイトである。

さて、一般に、n 端懸垂面の任意の列は、有限個の（分岐点を持つかもしれない）極小曲面の和に収束することが知られており、この収束は、極限で無限小極小曲面または分岐点となる点を除いた集合上の広義の意味での収束であり、複数の極限曲面間の距離は 0 かも知れないし、無限大かも知れない。これを修正相対ウェイト m_{jk} を用いて記述したのが、次の三つの定理である。

定理１　種数０の n 端懸垂面において、

$C_1\leqq m_{jk}\leqq C_2$

$(j,k=1,\cdots,m$ または $j,k=m+1,\cdots,n;j\neq k)$,

$\varepsilon_1\leqq m_{jk}\leqq\varepsilon_2$ $(j=1,\cdots,m;k=m+1,\cdots,n)$

を満たす正定数 $C_1,C_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2$ が存在して、$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ が十分小さいとき、端 $q_1,\cdots,q_m$ と端 $q_{m+1},\cdots,q_n$ を分ける最短閉測地線の長さは

$L\leqq C\varepsilon_2$

を満たす。ここで C は、$C_2/C_1,\varepsilon_2/\varepsilon_1,n$ のみによる正定数である。

特に m=1 または n-1 のときは、仮定の内、「$\leqq C_2$」、「$\varepsilon_1\leqq$」は必要無い。

定理２　種数０の n 端懸垂面において、

$C_1\leqq m_{jk}\leqq C_2$

$(j,k=2,\cdots,m$ または $j,k=m+1,\cdots,n$ または $j=1$ または $k=1;j\neq k)$,

$m_{jk}\leqq\varepsilon_2$ $(j=2,\cdots,m;k=m+1,\cdots,n)$

を満たす正定数 C_1,C_2,ε_2 が存在して、ε_2 が十分小さいとき、端 $q_2,\cdots,q_m$ を他から分けるくびれと、端 $q_{m+1},\cdots,q_n$ を他から分けるくびれの間の距離は

$d\geqq C/\varepsilon_2$

を満たす。ここで C は、$C_2/C_1,n$ のみによる正定数である。

定理１，２それぞれの仮定の下で、$\varepsilon_2\to0$ とすると、n 端懸垂面の収束の様子も具体的に見ることができる。

一方、よく知られている障害 $v_1=v_2=\cdots=v_n$（$v_1,v_2,\cdots,v_n$ は端の極限単位法ベクトル）の近くでは何が起きているのか記述するのが次の定理である。

定理３　$0<t<\pi$　とする。種数０の n 端懸垂面において、

$C_1\leqq m_{jk}\leqq C_2$ $(j,k=1,\cdots,n;j\neq k)$,

$\angle(v_j,v_k)\leqq\varepsilon_2$ $(j,k=1,\cdots,n)$

を満たす正定数 C_1,C_2,ε_2 が存在して、

$\varepsilon_2\leqq t/2$

のとき、

$\angle(G(z),v_1)\geqq t$

を満たす（つまり端の極限法方向と一定角度離れた 法方向を持つ）点 z 全体の集合の像の曲面積は

$A(t)\leqq\{C(C_2)^2/\cos^4(t/2)\}(\varepsilon_2/t)^4$

を満たす。ここで C は、$C_2/C_1,n$ のみによる正定数である。

実は、曲面のガウス曲率は、高々 n-1 個の点の近傍に集中する。ここでその点に現れるのは懸垂面ではなくて、エネパー曲面等である。

現時点で知られている一例も存在しないような障害は、端の極限単位法ベクトル $v_1,v_2,\cdots,v_n$ が 1 次元をはる場合がほとんどで、唯一の例外が

$\pm(-v_i)=\pm v_j\neq v_k=v_l$

である（$\{i,j,k,l\}=\{1,2,3,4\}$ とする）。4 個の端の大きさを一定範囲に保ったまま、極限法単位ベクトル $v_1,v_2,\cdots,v_n$ をこの配置に近付けて行くとどうなるか調べてみると、実は定理２の場合に相当していることがわかる。

この項目における結果については、論文②としてまとめ、鹿児島大学におけるシンポジウムでの講演②において発表を行った。

(2)前項の研究と並行して、種数１（トーラス）の場合への一般化も行った。具体的には、種数１の n 端懸垂面（コスタ曲面の１パラメーター族や種数１のジョージ・ミークス曲面など、重要な既知の例を含むクラスである）について、種数０の場合同様の定式化を行い（その中で相対ウェイトも導入した）、これを元に既知の例を再整理すると共に、さらに新しい例、特にシェーンによって与えられた非存在条件を満たすような方向への変形によって曲面が退化する様子を観察し得る族の例を複数構成した。特に、端は同じウェイトを持つが、合同でない２つの種数１の曲面の族を構成した。

この項目における結果については、既に論文にまとめ、現在投稿中である。

前項で述べた種数０の場合の諸結果の種数１における対応物に関しては、現在も研究を継続中である。

(3)さらに、関連が非常に強いと考えられる３次元ローレンツ空間内の極大曲面については、上記の一般化にとどまらず、極大曲面の

対称性と端以外の特異点集合との関係についても分析し、いくつかの存在定理、非存在定理を得た。特に、その特異点集合上に位置する単純な端に関する制約条件を分析した。
　これも、やや具体的に述べておくと、まず平面型または懸垂面型端の対応物である単純端のフラックスが、次の性質を持つことを確認した。

定理４　極大曲面の単純端において、極限法方向がヌルでなければ、フラックス・ベクトルは極限法方向と平行である。極限法方向がヌルならば、フラックス・ベクトルは極限法方向を含むヌル平面上にある。

定理５　極大曲面の位数１の単純端においては、極限法方向がヌルであり、フラックス・ベクトルは極限法方向と平行かつ０でない。

　これらのことを踏まえて、単純端のみを持ち、与えられたフラックスを実現する種数０の極大曲面の存在条件の定式化を行った。
　さらに、二重性と点対称性の二つの対称性に着目し、次の結果を得た。

定理６　分岐点を持たない極大曲面において、もし曲面が二重曲面ならば、折り返し点集合の任意の連結成分は閉曲線でない。

定理７　分岐点を持たない極大曲面において、もし曲面が点対称ならば、対称の中心をなす特異点集合の単純端のフラックス・ベクトルは０である。

定理８　分岐点を持たない極大曲面において、曲面が二重曲面であることは、各折り返し点の接平面がユークリッド計量の引き戻しに関する非０固有空間と一致することにより特徴付けられる。曲面が点対称であることは、対称の中心をなす特異点集合上の各点の接平面がユークリッド計量の引き戻しに関する０固有空間と一致することにより特徴付けられる。

　以上の結果は、単純端のみを持つ極大曲面には限定されない一般的なものである。
　さらにまた、３個の単純端のみを持つ種数０の極大曲面の分類を完成するとともに、４個の単純端のみを持ち、ほとんど全ての与えられたフラックスを実現する種数０の極大曲面の一般的存在を示した。
　この項目における結果については、論文①としてまとめ、一橋大学における研究集会での講演①において発表を行った。
　曲面論の分野においては、近年、特異点を持つ曲面に関する研究が一つの大きな流れとなりつつある。上記の結果は、単純端のみを持つ極大曲面の研究の基礎となる部分を整理したものである。

　本研究においては、結果的に極小曲面並びに極大曲面に対象を絞ることになった。今後、スカラー曲率の方程式を始め、関連の深い幾何学的変分問題へと考察の対象を拡げて行ければ、本研究もより実りあるものになると言えよう。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① Taishi IMAIZUMI, Shin KATO, Flux of simple ends of maximal surfaces in $R^{2,1}$, Hokkaido Mathematical Journal 37 (2008) 561-610.査読有
② Shin KATO, On the weights of end-pairs in n-end catenoids of genus zero II, Kyushu Journal of Mathematics 61 (2007) 275-319.査読有

〔学会発表〕（計２件）

① 加藤　信, n-end catenoid の flux, Kunitachi One-Day Symposium on Differential Geometry, 一橋大学佐野書院, 2008 年 7 月 19 日.
② 加藤　信, 極小曲面のフラックス, 第 54 回幾何学シンポジウム（全体講演）,鹿児島大学, 2007 年 8 月 24 日.

６．研究組織

(1)研究代表者
加藤　信（KATO SHIN）
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：１０２４３３５４

(2)研究分担者
今吉　洋一（IMAYOSHI YOICHI）
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：３００９１６５６
（H20→H21：連携研究者）
加須栄　篤（KASUE ATSUSHI）
金沢大学・理工研究域数物科学系・教授
研究者番号：４０１５２６５７
（H20→H21：連携研究者）
橋本　義武（HASHIMOTO YOSHITAKE）
東京都市大学・知識工学部・教授
研究者番号：２０２７１１８２
（H20→H21：連携研究者）