様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　５月　１日現在

研究種目：　基盤研究（C）
研究期間：　2006～2008
課題番号：　18540223
研究課題名（和文）　非線形拡散方程式系に関する解構造の研究
研究課題名（英文）　Research on the structure of solutions for nonlinear systems of reaction-diffusion equations

研究代表者
山田　義雄（YAMADA, Yoshio）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：20111825

研究成果の概要：数理生態学に現れる非線形拡散を伴う反応拡散方程式システムを解析した。これは生存競争を行う２種の生物種の棲み分け現象を記述するモデルとして定式化されたものである。正値定常解は２種の生物種の共存状態として生態学的にも意味のある解であり、このような解の構造解明が重要なテーマである。正値定常の存在を示すための理論・技法の開発をおこなった。同時に、非線形拡散係数を無限大とする場合の極限問題と、本来の問題との関係を調べることにより、解構造解明への手がかりをつかむことができた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	**1,100,000**	**0**	**1,100,000**
２００７年度	**1,100,000**	**330,000**	**1,430,000**
２００８年度	**1,100,000**	**330,000**	**1,430,000**
年度			
年度			
総　計	**3,300,000**	**660,000**	**3,960,000**

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：非線形現象、反応拡散方程式、非線形拡散、数理生態学、正値定常解、安定性

１．研究開始当初の背景

物理学、化学反応、数理生態学などの分野で観測される現象のなかには、密度や濃度の濃淡の違いにより、縞模様のパターンとなって現れるものがある。このような現象は非線形の反応拡散方程式系として定式化されることが多い。反応拡散方程式系に対する数値シミュレーションを実行すると、ダイナミクスの激変を伴う分岐、振動、パターンの形成や界面の生成などの非線形現象が観測される。このような現象を数理科学の問題と捉え、理論的に解明することは重要なテーマである。しかし、現状は理論的なアプローチが端緒についたにすぎない。

パターン、界面の生成や発展について、相転移の方程式や数理生態学に登場するロトカ・ボルテラ型の反応拡散方程式系などを中心に研究が進みつつある。相転移の方程式では相の変化域が遷移層に対応し、数理生態学の方程式では種の棲み分けが空間的非一様性を伴う解に対応している。

反応拡散方程式の解の性質のうち、解のプロファイル（形状）のような空間的非一様性に関わる性質を、モデルとする現象に即して解釈すると非常に興味深い。さらに非一様な状態が時間的に推移していく過程を研究する意義も大きい。しかし、これらのテーマに関わる統一的な理論、技法はほとんど開発されていないのが現状である。

２．研究の目的

当研究ではパターンや界面に代表される空間的な非一様性に着目し、非線形拡散方程式の解における、空間的非一様性の発生のメカニズムとその遷移過程の様子を理論的に明らかにすることを目指す。主として扱う非線形方程式は数理生態学に現れる次の形の反応拡散方程式である：

$$u_t = \Delta[(1+\alpha(u,v))u] + uf(u,v),$$
$$v_t = \Delta[(1+\beta(u,v))v] + vg(u,v),$$

これは非線形拡散を伴う 2 種類の生物の生存競争を扱うモデルであり、u,v はそれぞれ個体数密度を表す。このような形のシステムは 2 種の生物の棲み分け現象を記述するために 1979 年に Shigesada-Kawasaki-Teramoto により提起されたものが最初である。その後、多くの数学者により研究されているものの、時間大域解の存在、正値定常解集合の構造など、完全な解明に至っていない問題も多い。

(1) 非定常問題の時間大域解の研究

上に挙げた非線形拡散方程式系のうちで

$$\alpha(u,v) = \alpha u + \gamma v, \quad \beta(u,v) = \beta u + \delta v,$$
$$f(u,v) = a - u - cv,$$
$$g(u,v) = b - du - v,$$

の形のものが、ロトカ・ボルテラ型の競合モデルに対するシステムである。ここで、$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は非負定数、a,b,c,d は正定数である。数学的に求められることは、任意の非負初期関数に対して、時間大域解を構成することである。これまでに、非線形拡散係数（cross-diffusion, self-diffusion）や空間次元に制約を置いた上で、大域解の構成が Yagi, Lou-Ni, Le, Choi-Lui-Yamada らによってなされている。今後は、空間次元などの制約を弱くした上で、時間大域解を構成すること、解の有界性を示すこと、グロバール・アトラクタを構成し、その次元を評価することなどが具体的な研究目標である。

(2) 定常問題の正値解集合の構造の解明

(1)で挙げたようなロトカ・ボルテラ型の競合モデルで、交差拡散（cross-diffusion）を伴うケースを考える。同次ノイマン境界条件下、空間次元が 1 の場合は Mimura, Tsujikawa, Kan-on らの結果、空間 2，3 次元のケースは Lou-Ni の結果があり、空間非一様な正値定常解の存在条件が知られている。また、同次ディリクレ境界条件の場合は Yamada による正値定常解が存在するための十分条件が得られているにすぎない。しかし、いずれの境界条件のケースも、解の個数、プロファイル、安定性など、解の定性的性質は未解明のままである。解集合の構造についてより詳細な結果を求めることが重要である。

３．研究の方法

研究の成果を挙げるための一般的な方法は、非定常問題の解析においては、発展方程式論、関数解析学などの理論を利用することである。しかし、統一的な理論のもとで、時間大域解が構成できるわけではない。局所解の構成、アプリオリ評価の導出など、随所に解析の工夫とアイデアが必要となる。また、定常問題における正値解の存在については、分岐理論、写像度の理論、関数解析学などにより最小限の結果は得られる。しかし、解のプロファイル、安定性などのレベルの高い成果を得るためには、新しい理論・技法・アイデアの開発が必要となる。

(1)当研究の役割分担

上記の状況を踏まえ、研究代表者、連携研究者は次のような役割分担をした。

①非線形偏微分方程式全般にわたる研究を山田、堤が分担、非線形放物型方程式の研究を大谷、竹内、久藤が分担、非線形楕円型方程式の研究を大谷、田中、廣瀬、大屋が分担し、山田が研究統括を行った。

②応用解析の立場から、堤、大谷、中島，久藤が協力し、必要な理論、道具、技法の開発を行った。
③パターンの形成、界面の生成など、解の挙動を調べる上で必要な数値シミュレーションを若狭が行った。
④界面の生成に関し、中島、若狭が研究協力を行った。
⑤定常問題の変分法による研究協力を田中、大谷、大屋が行った。
⑥反応拡散方程式について久藤、中島、佐藤、若狭が研究協力を行った。

(2)成果の発表と研究交流
代表者、連携研究者は本研究に関連するテーマで開催される国際会議、研究集会、シンポジウムに参加、成果発表や研究討論を通して研究交流を行った。数学分野では、このような研究者間の直接の交流を通して、数学的に重要なアイデアが生れたり、新しい視点から問題を取り組むことができる、などのメリットがある。本研究においても、海外の研究者との交流の幅が拡がり、将来の研究交流の道が開かれた。

４．研究成果
(1) 非線形拡散を伴うロトカ･ボルテラ型競合モデルに対する定常問題の解析
同一の領域で生存競争する 2 種の生物種の個体数密度を u,v とする。自然界ではそれぞれの生物の拡散を考える際に、通常のランダムな拡散に加え、自他それぞれの種の個体数密度の影響を受けるような拡散効果も考慮に入れるのが自然である。このように考えると、u,v の変化は交差拡散項を含む反応拡散方程式系

$$u_t = \Delta[(1+\alpha v+\gamma u)u]+u(a-u-cv),$$
$$v_t = \Delta[(1+\beta u+\delta v)v]+v(b-du-v),$$

によって与えられる。これは 2 種類の生物種の棲み分け現象をモデル化するため 1979 年に Shigesada-Kawasaki-Teramoto により提起されたものである。
本研究では定常問題に焦点を絞り、同次ディリクレ境界条件のもとで、次の形の非線形楕円型方程式システム

$$\Delta[(1+\alpha v)u]+u(a-u-cv)=0,$$
$$\Delta[(1+\beta u)v]+v(b-du-v)=0,$$

に対する正値解の構成法や、存在証明を研究した。ここでは反応項に現れる a,b に着目し、正値解の存在条件を a,b を利用して表現することができた。
このためのアプローチの仕方として、Dancer らにより開発された写像度の理論を用いる方法と、分岐理論を用いる方法の 2 つがある。どちらの方法も適用可能であるが、写像度理論による方法は解の存在証明自体においては非常に強力であるものの、背理法に基づく証明となるため、具体的に解を構成するものではない。したがって、解の詳しい性質についての情報は乏しい。一方、分岐理論を利用する方法は、局所分岐解を具体的に構成することになる。これにより、a,b を分岐パラメータとみなすと、正値解の分岐の方向や安定性についての情報を導くことが可能である。ただし、これは局所的なものであり、大域的な分岐構造についての情報には制約がある。
非線形拡散を伴う楕円型方程式系に対する上記の研究成果は、統一的に展開することが可能であり、M.Chipot 教授編纂の Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equatons, Vol. 6 の第 6 章として論文にまとめられている。

(2) 分数型非線形拡散を伴うロトカ・ボルテラ型の捕食者・被食者モデルの研究
分数型の非線形拡散項を伴うタイプの捕食者・被食者モデルに対する楕円型方程式の解析をおこなった。u,v をそれぞれ、被食者、捕食者の個体数密度とすると、非線形楕円型方程式システムは次の型に表わされる：

$$\Delta u+u(a-u-cv)=0,$$
$$\Delta[(1+\gamma/(1+\beta u))v]+v(b+du-v)=0,$$

ここで a,c,d,β,γ は正定数である．被食者の個体数密度が増加すると、これに反比例して捕食者の拡散係数が減少するような、上のタイプのシステムは現実に即した定式化である．とくに交差拡散係数 β が正値解集合の構造にどのような影響を及ぼすかを知ることは数学的にもまた生態学的に興味深い問題である。
同次ディリクレ境界条件のもとで、上記楕円型方程式系に対する正値解について、存在条件を係数 a,b に対する条件として書き下すことができる。このためのアプローチの仕方は、写像度理論、分岐理論どちらの方法も有効である。
正値解集合の構造について、より詳細な情報を得るためにはまだ困難がある。そこで、拡散係数 β を無限大まで大きくすることにより、正値解がどのような関数に収束するか、その極限関数のみたすべき問題は何か、などの問題から手がかりをつかむことも重要である。$\beta\to\infty$ のとき，正値解の極限関数は

$$\Delta u+u(a-u-v)=0,$$
$$\Delta v+v(b+du-v)=0,$$

の正値解に収束するか、あるいは

$$\Delta w+w(a-cv)=0,$$
$$\Delta[(1+\gamma/(1+w))v]+v(b-v)=0,$$

の正値解（ただし後者においては $\beta u\to w$）に収束するかのいずれかであることがわかった。係数 a,b が特別な条件をみたさない限り、上の 2

つの問題が同時に正値解をもつことはないことも示されている。したがって、β→∞のときの正値解の挙動に関し、2 つの極限問題のどちらに収束するか、についても特徴付けが可能であることがわかった。

(3) 非線形拡散方程式の極限問題の解析

(2)で述べたように、交差拡散項の係数が無限に大きくなるときの情報についてはかなり詳しい結果を得ることができた。この中には極限問題自身に対する正値解についての情報も含まれる。捕食者・被食者モデルの解析において登場した極限システム

$$\Delta w + w(a - cv) = 0,$$
$$\Delta[(1+\gamma/(1+w))v] + v(b - v) = 0,$$

について、どんな条件下で正値解をもつか、解をどのように構成するかについて、分岐理論を利用し、係数 a,b に関する条件を設けて成果を示すことができる。極限問題の可解性についてのこの結果は、β→∞での正値解の挙動を決定する際に貴重な役割を果たす。

また、極限問題を導く際に開発したアイデア・技法は、汎用性の高い技法であり、競合モデルの解析においても有用である。簡単のため、

$$\Delta u + u(a - u - cv) = 0,$$
$$\Delta[(1+\beta u)v] + v(b - du - v) = 0,$$

を、同次ディリクレ境界条件のもとで考える。β→∞での正値解がどのような挙動をするか調べるときには、βに関して一様なアプリオリ評価を解 u,v に対して導くことがポイントとなる。空間次元が 5 以下であるという技術的制約があるが、解 u,v についてβに無関係な評価を求めることができた。これは、比較定理、エネルギー評価、楕円型方程式に対する評価、ソボレフの埋め込み定理などを組み合わせて初めて可能となったものである。

次のステップは極限移行である。得られた成果はβ→∞とともに正値解 (u,v) の極限関数は $(u^*,0)$ であるか（ただし u^* は

$$\Delta u^* + u^*(a - u^*) = 0$$

の正値解である）、もしくは次の問題の正値解 (w,v) に収束すること：

$$\Delta w + w(a - cv) = 0,$$
$$\Delta[(1+w)v] + v(b - v) = 0,$$

（後者においては $\beta u \to w$）に限られる点である。この極限問題についても、どんな a,b について、正値解が存在するか、分岐理論を利用してかなり詳しい結果を導くことができた。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　16 件）

①KousukeKuto and Yoshio Yamada: Limiting characterization of stationary solutions for a prey-predator model with nonlinear diffusion of fractional type, Differential Integral Equations, 発表予定、査読有

②Yoshio Yamada: Global soluitions for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto model with cross-diffusion, ``Recent Progress on Reaction-Diffusion Systems and Viscosity Solutions,” Edited by Du, Ishii and Lin, pp. 282-298, 2009, 査読無

③ Kousuke Kuto: Bifurcation branch of stationary solutions for a Lotka-Volterra cross-diffusion system in a spatially heterogeneous environment, Nonlinear Anal. RWA, Vol. 10 (2009), pp. 943-965, 査読有

④ Yoshio Yamada: Positive solutions for Lotka-Volterra systems with cross- diffusion, ``Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations,” Vol. 6, Edited by M.Chipot, pp. 411-501, 2008, 査読有

⑤Fang Li, Kimie Nakashima and Wei-Ming Ni: Stability from the point of view of diffusion, relaxation and spatial inhomogeneity, Discrete Contin. Dyn. Syst., Vol. 20 (2008), pp. 259-274, 査読有

⑥ Munemitsu Hirose: Existence of global solutions for a semilinear parabolic Cauchy problem, Differential Integral Equations, Vol. 21 (2008), pp. 623-652, 査読有

⑦菱田俊明：回転する障害物の周りでの非圧縮性粘性流体の方程式の数学解析、数学、第 60 巻、2008 年、pp. 68-94, 査読有

⑧ P. Felmer, S. Martinez and Kazunaga Tanaka: Highly oscillatory behavior of the activator in the Gierer and Meinhardt system, Math. Ann., Vol. 340 (2008), pp. 749-773, 査読有

⑨ M. A. Efendiev and Mitsuharu Otani: Infinite dimensional attractors for evolution equations with p-Laplacian and their Kolmogorov entropy, Differential Integral Equations, Vol. 20 (2007), pp. 1201-1209, 査読有

⑩Yihong Du and Kimie Nakashima: Morse index of layered solutions to the heterogeneous Allen-Cahn equation, J. Differential Equations, Vol. 238 (2007), pp. 87-117, 査読有

⑪ Kimie Nakashima and Tohru Wakasa: Generation of interfaces for Lotka-

Volterra competition-diffusion system with large interaction rates, J. Differential Equations, Vol. 235 (2007), pp. 586-608, 査読有
⑫Kousuke Kuto: A strongly coupled diffusion effect on the stationary set of a prey-predator model, Adv. Differential Equations, Vol. 12 (2007), pp. 145-172, 査読有
⑬ Shingo Takeuchi: Coincidence sets in semilinear elliptic problems of logistic type, Differential Integral Equations, Vol. 20 (2007), pp. 1075-1080, 査読有
⑭ Tomohito Kadota and Kousuke Kuto: Positive steady states for a prey-predator model with some nonlinear diffusion terms, J. Math. Anal. Appl., Vol. 323 (2006), pp. 1387-1401, 査読有
⑮ Wakasa Tohru: Exact eigenvalues and eigenfunctions associated with linearization for Chafee-Infante problem, Funkcial. Ekvac., Vol. 49 (2006), pp. 321-336, 査読有
⑯ Takanori Ide, Kazuhiro Kurata and Kazunaga Tanaka: Multiple stable patterns for some reaction-diffusion equation in disrupted environments, Discrete Contin. Dyn. Syst., Vol. 14 (2006), pp. 93-116, 査読有

〔学会発表〕(計　10 件)
① 久藤衡介：Bifurcation structure of steady-states for an adsorbate-induced phase transition model, 「非線形発展方程式と現象の数理モデル」研究集会、2008 年 11 月 18 日、京都大学数理解析研究所
② 久藤衡介、山田義雄：Limiting characterization for coexistence states to a Lotka-Volterra model with nonlinear diffusion of fractional type, 日本数学会秋季総合分科会、2008 年 9 月 25 日、東工大
③ Yoshio Yamada: Limiting behavior of solutions for some reaction-diffusion systems with nonlinear diffusion, The 5th World Congress of Nonlinear Analysts, 2008 年 7 月 3 日, Orlando, Florida, USA.
④Kousuke Kuto：Coexistence problem for a prey-predator model with density-dependent diffusion, The 5th World Congress of Nonlinear Analysts, 2008 年 7 月 3 日, Orlando, Florida, USA.
⑤Yoshio Yamada：Limiting characterization of stationary solutions for some Lotka-Volterra models with nonlinear diffusion, Workshop on Recent Advances on Nonlinear Parabolic and Elliptic Differential Equations, 2007 年 12 月 4 日、龍谷大学
⑥久藤衡介：Stability of steady-states to the SKT model in a heterogeneous environment, 日本数学会秋季総合分科会、2007 年 9 月、東北大学
⑦ Yoshio Yamada ：Population models of interacting species with cross and self diffusion, Eco Summit 2007, 2007 年 5 月 23 日、北京九貨山庄 (Jiuhua Resort & Convention Center)
⑧山田義雄：数理生態学におけるSKTモデルと関連する話題、東北大学数学教室談話会、2006 年 11 月 6 日、東北大学
⑨久藤衡介：A Lotka-Volterra cross- diffusion model in spatially hetero- geneous environments, 「現象の数理モデルと発展方程式」研究集会、2006 年 9 月、京都大学数理解析研究所
⑩久藤衡介：空間非一様な環境下でのLotka-Volterra拡散系に対する定常解、日本数学会秋季総合分科会、2006 年 9 月、大阪府立大学

〔図書〕(計　1 件)
①鈴木武、山田義雄、柴田良弘、田中和永：内田老鶴圃、理工系のための微分積分 I,II、2007年発行、478ページ(pp. 27-71, pp. 125-183 担当)

〔その他〕
ホームページ
http://www.f.waseda.jp/yamada/

６．研究組織
(1)研究代表者
山田　義雄（YAMADA　YOSHIO）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：20111825
(2)研究分担者
2006 年～2007 年
堤　正義（TSUTSUMI　MASAYOSHI）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70063774
菱田　俊明（HISHIDA　TOSHIAKI）
名古屋大学・大学院多元数理科学・教授
研究者番号：60257243
廣瀬　宗光（HIROSE　MUNEMITSU）
明治大学・理工学部・講師
研究者番号：50287984
2006 年～2007 年の間は(3)に記載の研究者も研究分担者として参加していた。

(3)連携研究者

大谷　光春（ÔTANI　MITSUHARU）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：30119656
田中　和永（TANAKA　KAZUNAGA）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：20188288
中島　主恵（NAKASHIMA　KIMIE）
東京海洋大学・海洋科学部・准教授
研究者番号：10318800
竹内　慎吾（TAKEUCHI　SHINGO）
工学院大学・工学部・准教授
研究者番号：00333021
久藤　衡介（KUTO　KOUSUKE）
福岡工業大学・工学部・准教授
研究者番号：40386602
大屋　博一（OHYA HIROKAZU）
佐世保工業高専・一般科目・講師
研究者番号：70409647
佐藤　典弘（SATO NORIHIRO）
早稲田大学・理工学術院・助手
研究者番号：80454023
若狭　徹（WAKASA　TOHRU）
早稲田大学・理工学術院・助教
研究者番号：20454069