

平成 21 年 6 月 2 日現在

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006 ～ 2008

課題番号：18540380

研究課題名（和文） 超対称な非可換幾何学と量子物理学

研究課題名（英文） Supersymmetric noncommutative geometry and quantum physics

研究代表者 會澤 成彦 (AIZAWA NARUHIKO)

大阪府立大学・理学系研究科・准教授

研究者番号：70264786

研究成果の概要：

我々の住んでいる時空は本当に連続的なものなのか？という疑問は1940年代から存在する。近年、座標 (x, y) が非可換量、すなわち $xy \neq yx$ であるような対象が物理の中で重要性を増してきた。近代の物理学において重要なもうひとつの概念は超対称性である。この研究では超対称性と非可換な空間を結びつけた理論を、主に量子群と呼ばれる数学的対象を用いて展開した。いくつかの量子群で具体的な計算を行ったところ、量子群の数学的性質を正確に取り込むことにより、物理学でなじみのある概念や関係式を自然な形で非可換な世界へ拡張できることを示した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	800,000	0	800,000
2007年度	600,000	180,000	780,000
2008年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,000,000	360,000	2,360,000

研究分野：数理物理

科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎

キーワード：量子群、表現論、非可換幾何学、特殊関数

1. 研究開始当初の背景

超対称性は理論物理の重要な概念のひとつである。もともとは1970年代に素粒子物理学の中で導入された物であるが、その概念と手法は広く他の分野にも応用され、現在では理論物理の全ての分野とともに数学においても盛んに研究に用いられている。

一方、この数年の間に宇宙の初期の状態や重力の量子論、素粒子のストリング理論との

関連で、通常の幾何学を非可換な空間に拡張した物（非可換幾何学）の物理的重要性が認識されるようになり、非可換幾何学の研究が活発化した。非可換な空間というのは、空間内の点の座標 (x, y) が非可換量、すなわち $xy \neq yx$ であるような世界のことである。そのような世界での幾何学を作ろうとする試みが非可換幾何学である。非可換幾何学という数学自体がいまだに未発達であり大きな研究テーマであるが、理論物理の観点からす

ると超対称性と非可換幾何学という物理的に重要なふたつの概念を融合させることは概念的にも、応用上もたいへん重要かつ必要なことであると考えられる。

このような研究は量子重力や素粒子といった分野では活発に議論されているが、それらの分野に限らず物理的な応用が期待されるものの、他の分野では注目されているとは言いがたい。また、数学的にも系統的な研究がなされていないようである。

2. 研究の目的

(1) 全体構想

本研究の目的は、量子重力やストリングなどの特定の物理への応用に限ることなく、広く一般に使えるような形で非可換幾何学と超対称性を融合させた超対称な非可換幾何学を発展させることである。具体的には、次のようなことが必要となる。

- ① 超対称な非可換空間を系統的に作り、物理的に意味のある空間とそうでないものを区別する。
- ② そのような空間上での微積分、ベクトル解析、共変微分、曲率、振率などの概念を定式化し、通常の幾何学と同等のことができるようにする。
- ③ 超対称非可換空間上での微分方程式とその解となる関数を研究する。

これらの形式的な応用として超対称非可換空間上での力学、量子力学、場の理論を議論することができるであろう。また、さらに物理的な応用としては各々の超対称空間と知られている物理系の関連を調べることであり、このためにも数学的な一般論のみではなく、具体的な超対称非可換空間およびその上での幾何学の例を多数提供することを目指す。

非可換幾何学には何通りかのアプローチがあり、互いに共通する部分と異なる部分がある。主な物は次の3つであろう。

- ① Connes による K 理論、コホモロジー、指数定理による方法
- ② Dubois-Violette, Michor, Madore らによる Derivation による方法
- ③ Woronowicz, Manin らによる C^* 代数、量子群による方法

本研究では主に③の量子群とその超対称化を用いて非可換な超対称空間の研究を行う。また、①や②で開発された手法も適宜取り入れる。

(2) これまでの研究

我々は前項②の derivation による方法を超対称な場合に拡張し、超対称非可換空間上での共変微分、曲率、計量などの一般論を定式化した。その応用として、 $OSp_n(2/1)$ という

量子群の場合に共変微分、曲率などの具体形を求め、この場合には超対称非可換空間が物理適要請を満たさないことを示した。また、他のいくつかの場合にも同様な計算を試みたが共変微分を定義する段階で自己矛盾が発生する可能性があることが分かった。

一方で、量子群 $OSp_q(1/2)$ に対して超対称な非可換空間を系統的に求める方法を開発し、この方法で最も一般的な3次元超対称非可換平面、5次元の超対称非可換球面を定義し、その性質を調べるなどの研究を行った。

また、量子群の coherent state についての研究を行っており、coherent state を用いた幾何学の研究の準備もできている。

(3) 具体的目標

前項で述べたように、我々は超対称非可換幾何学の部分的な一般論を持っている。さまざまな超対称非可換空間の例を作り、共変微分や曲率などの幾何学量を議論することにより我々の一般論の物理的・数学的妥当性を検討するとともに、物理系との関連を調べる。現在の一般論は可換な場合の幾何学の一部分を非可換な場合に拡張したにすぎない。また、非可換化された部分にもまだ不満足な点があるので、多くの例の研究を通して一般論の改良、および一般論をさらに推し進めて通常の幾何学のさらなる非可換化の可能性を検討する。

具体的には、 $SL(n/m)$ 、 $OSp(n/m)$ という物理的に重要な超対称リー群に対応する量子群をとりあげ、対応する超対称非可換空間の構成、それらの上での共変微分、曲率や計量などの計算を行なう。そのためには、もっとも基本的な超対称リー群 $OSp_q(1/2)$ の場合を十分に調べておく必要がある。量子群 $OSp_q(n/m)$ の場合の物理的な応用としてはボゾン・フェルミオンの混在する量子多体系で可積分なモデルの研究、超対称化した KdV 方程式の研究などができると予想している。また、超対称非可換空間は非可換代数となるのでその表現を考えることができる。表現の行列要素として、あるいは表現基底として新しい直交多項式を得ることができるはずである。そのような直交多項式的具体形を求め、その性質を調べる。表現基底としての直交多項式は非可換空間での波動関数と解釈できるものであり、物理的にも興味深い。数学的には古典的なリー群・リー代数の場合には存在しないが量子群・量子代数の場合にのみ存在する多項式として興味深いと思われる。

3. 研究の方法

連携研究者2名とともに国際共同研究である。理論の研究であるため、研究の方法は言うまでもなく、議論しながら計算を進めるということになる。電子メールによる情報

交換を主な手段として議論を進めるが、できる限り相互に訪問し直接議論をする機会を持つように努める。

4. 研究成果

(1) $OSp_q(1/2)$ の表現と非可換空間

[発表論文③⑤⑦など]

量子群を用いて非可換幾何学を考える場合、その表現が重要な役割を果たす。そこで、もっとも基本的な量子超リー群 $OSp_q(1/2)$ の表現について詳細に調べた。表現を求めるにあたり、量子群の数学的性質 (Hopf 代数構造と双対性) を完全に取り込めば、リー群の場合に物理学者になじみのある方法がそのまま量子群の場合に拡張できることを示した。この方法で表現を具体的に求めたところ $OSp_q(1/2)$ の表現が little q -Jacobi 多項式とよばれる特殊関数を用いて表せることが示された。量子群 $OSp_q(1/2)$ には対応する古典超リー群の場合には存在しない表現があることが知られているが、そのような表現も我々の方法で求めることができ、やはり little q -Jacobi 多項式で表されることが示された。

また、 $OSp_q(1/2)$ の作用で共変な非可換空間を作る我々の方法を適用するには Clebsch-Gordan 係数と呼ばれるものが必要になるので、Clebsch-Gordan 係数を求めて偶次元の非可換空間を構成した。これは古典超リー群の場合には存在しない空間である。

この研究は量子群による超対称非可換幾何学への第一歩であり、我々の非可換空間の構成法が有用であることを示している。今後はさらにランクの高い量子群へ一般化することが課題となる。

(2) ファジートーラス

[発表論文②④など]

2006年に2次元リーマン面を非可換化する方法が導入され、球面の次に簡単な例として非可換なトーラス (ファジートーラスと呼ばれる) が構成された。我々はこの構成方法に注目し、種数の高いリーマン面について調べたところ、この方法は期待したほど上手くいかないことに気がついた。

そこでファジートーラスを代数的な観点から研究することを試みた。ファジートーラスではトーラスの座標やトーラス上の関数は行列を用いて表される。どのような行列を用いることができるのかを系統的に分類することに成功し、これまで知られていたもの以外の行列が存在することを見出した。また、非可換トーラス上の行列を用いた coherent state を作成し、これまでは知られていなかったベッセル関数の変形が現れることを明らかにした。今後の課題としてファジートー

ラスの超対称化を考察したい。

非可換幾何学の観点からはファジートーラス上でのディラック方程式を得ることが重要である。というのはディラック演算子の固有値は非可換空間での距離と解釈できるからである。我々はまず可換なトーラス上でのディラック方程式の研究を行った。トーラス上のディラック方程式はいろいろな所で論じられているが、ほとんどは平面に周期境界条件を課しただけのものであり、曲率は考慮されていない。そこで我々はゼロでないガウス曲率を持つトーラス (ファジートーラスの可換極限に相当するもの) 上でのディラック方程式を導き、その固有値問題を調べた。球面の場合と同様にゼロエネルギー解が存在することはほぼ示せたが、まだ不完全といわざるを得ない。完全に固有値問題を解くことと、ファジートーラスの場合は今後の課題である。

(3) Coherent state による非可換幾何学

[発表論文①など]

Perelomov による generalized coherent state (以下 CS と略記する) は物理的に重要な幾何学的性質を持っている。つまり、CS はある空間上の関数とみなすことができるのであるが、この空間の複素多様体としての幾何学的情報 (計量など) を CS から導くことができる。さらにこの情報を用いて考えている空間上での Poisson 括弧を定義することが可能であり、結果的に正準形式での運動方程式を設定できる。我々は量子群の CS を用いて、上記の事実の非可換化を試みた。

我々の採用した方法は次の2点で特徴づけられる:

- (i) 物理学者にはなじみの Perelomov の方法をそのまま量子群の場合に拡張した
- (ii) 量子群の数学的性質 (Hopf 代数構造と双対性) を完全に取り込んだ

(ii) の性質を持つ CS の一般論はこれまでもあったが、(i) を考慮した具体的な構成は今回の仕事で初めてである。今回我々が調べたのは $SU_q(2)$, $SU_q(1, 1)$, $H_q(1)$ と呼ばれる量子群の場合、および超対称量子群 $OSp_q(1/2)$ の場合である。特に $SU_q(2)$ はもっとも基本的な量子群であるので、この場合を重点的に調べたような結果を得た: (i) CS の応用上最も重要な性質である resolution of unity を満たす (ii) 非可換な2次元球面である Podles の q -sphere の複素多様体としての記述が得られる (iii) q -Sphere の複素座標での微分を構成できる。 $SU_q(1, 1)$ の場合は q -sphere の代わりに非可換2葉双曲面を得たが、resolution of unity の証明が完了していない。また、 $H_q(1)$ の場合は非可換空間は得られず、可換な2次元複素平面が得られること

を示した。

超対称量子群 $OSp_q(1/2)$ の場合、CS を定義するためにはすべての生成元の複素共役を定義する必要があるが、これまでは知られていなかったようである。我々は複素共役を決定し、CS を構成することに成功した。この CS が定義されている非可換空間としては、我々が以前に導入した非可換超球面が得られることが期待されるが、証明はまだ完了していない。

非可換幾何学に量子群の CS を用いる試みは少なく、超対称の場合には我々が初めてである。この試みは複素多様体 (Kähler 多様体) の非可換版を議論していることになり、非可換 (超) 空間上で Poisson 括弧を定義することに成功すれば、形式的ではあるが非可換空間上での古典力学を展開することができる。今後、この方向で研究を進めることにより運動方程式という物理的な物を直接非可換

(超) 空間上で議論できるようになるとともに、数学的にも新しい見地を提供できると期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① N. Aizawa and R. Chakrabarti, Coherent state on $SU_q(2)$ homogeneous space, *Journal of Physics A:Mathematical and Theoretical*, 掲載決定, 査読有
 - ② N. Aizawa and R. Chakrabarti, Representations of fuzzy torus, *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 128 (2008) 012047 (14pages), 査読有
 - ③ N. Aizawa, R. Chakrabarti, S.S. Naina Mohammed and J. Segar, Representations of quantum supergroups and basic hypergeometric functions, *Publicaciones de la Real Sociedad Matematica Espanola*, Vol. 11 (2007) 210-215, 査読有
 - ④ N. Aizawa and R. Chakrabarti, Fuzzy torus via q -parafermion, *Journal of Physics A:Mathematical and Theoretical*, Vol. 40 (2007) 10021-10030, 査読有
 - ⑤ N. Aizawa, R. Chakrabarti, S.S. Naina Mohammed and J. Segar, Basic hypergeometric functions and covariant spaces for even dimensional representations of $U_q[osp(1/2)]$, *Journal of Physics A:Mathematical and Theoretical*, Vol. 40 (2007) 14985-15000, 査読有
- ⑥ N. Aizawa, M. Harada, M. Kawaguchi and E. Otsuki, All link invariants for two dimensional solutions of Yang-Baxter equation and dressings, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, Vol. 15 (2006) 1279-1301, 査読有
 - ⑦ N. Aizawa, R. Chakrabarti, S.S. Naina Mohammed and J. Segar, Universal T -matrix, representations of $OSp_q(1/2)$ and little Q -Jacobi polynomials, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 47 (2006) 123511, 査読有
- [学会発表] (計 9 件)
- ① 會澤成彦, Noncommutative coherent states for quantum groups, *Noncommutative Structures in Mathematics and Physics*, 2008 年 7 月 23 日, Brussels, Belgium
 - ② 會澤成彦, Noncommutative structure of quantum group coherent states, 3rd International Meeting on Frontiers of Physics, 2009 年 1 月 14 日, Genting highlands, Malaysia
 - ③ 會澤成彦, Coherent state による量子群の等質空間の非可換性, 日本物理学会, 2009 年 3 月 30 日, 立教大学
 - ④ 會澤成彦, $SU_q(2)$ coherent state と非可換球面, 日本数学会, 2008 年 9 月 25 日, 東京工業大学
 - ⑤ 會澤成彦, 非可換な coherent state とその性質, 日本物理学会, 2008 年 9 月 22 日, 岩手大学
 - ⑥ 會澤成彦, ファジィトーラスの行列表示と非可換幾何学, 日本物理学会, 2007 年 9 月 22 日, 北海道大学
 - ⑦ 會澤成彦, Representations of fuzzy torus, 5th International Symposium "Quantum Theory and Symmetries", 2007 年 7 月 23 日, Valladolid, Spain
 - ⑧ 會澤成彦, Quantum supergroup と特殊関数, 日本物理学会, 2006 年 9 月 24 日, 千葉大学
 - ⑨ 會澤成彦, $OSp_q(1/2)$ の表現と Q -hypergeometric functions, 日本数学会, 2006 年 9 月 19 日, 大阪市立大学

[その他]

- ① N. Aizawa and R. Chakrabarti,
Noncommutative superspaces
covariant under $OSp_q(1/2)$ algebra,
in "Proceedings of the VI International
Workshop on Lie Theory and Its
Applications in Physics",
H.-D. Doebner and V. K. Dobrev
(editor), Heron Press (Sofia) (2006)
97-108
- ② N. Aizawa, V. K. Dobrev, H.-D.
Doebner and S. Stoimenov,
Intertwinig operators for the
Schrodinger algebra in $n \geq 3$ space
dimension,
in "Proceedings of the
VII International Workshop on
Lie Theory and Its Applications in
Physics",
H.-D. Doebner and V. K. Dobrev
(editor),
Heron Press (Sofia) (2008) 372-399

6. 研究組織

(1) 研究代表者

會澤 成彦 (AIZAWA NARUHIKO)

大阪府立大学・理学系研究科・准教授

研究者番号: 70264786

(3) 連携研究者

Ranabir Chakrabarti

Department of Theoretical Physics・

University of Madras・Reader

Jambulingam Segar

Department of Physics・

Ramakrishna Mission Vivekananda College・

Lecturer-SS