

研究種目： 基盤研究（C）  
 研究期間：2006～2008  
 課題番号： 18540383  
 研究課題名（和文） 非平衡条件下におけるハミルトン系カオスのエルゴード論的構造と輸送現象  
 研究課題名（英文） Ergodicity and Transport Phenomena in Hamiltonian Systems under Non-equilibrium Conditions  
 研究代表者  
 相澤 洋二（AIZAWA, Yoji）  
 早稲田大学・理工学術院・教授  
 研究者番号：70088855

## 研究成果の概要：

ハミルトン系カオスの示す新たなエルゴード問題を拓くために、( )長時間ゆらぎ（非定常カオス）の異常性出現のメカニズムの探求と( )非平衡状況下におけるカオス構造の探求に挑戦した。

現在までカオスのエルゴード性の研究は、すべて孤立力学系を対象にして発展してきたものであり、注目する力学系の対象を非定常系や開放系にまで拡張してゆこうとする上記二つの挑戦は、従来のハミルトン系のエルゴード性の研究の単純な延長では抱えきれない部分が多くあるため、モデル構成や注目する観測量について工夫を凝らし、計算機実験および理論計算を推進した。まづ、ハミルトン系の特徴である長時間相関の現象を整理し、次にそれらが非平衡条件下でどのように効果を及ぼすか、という問題を順次追求した。

非定常性に関する研究では、これまでの無限測度系に対する研究手法を一樣測度を持つハミルトン系にまで拡張する方法を開発した。これによって一樣測度の下でも異常拡散や補足時間の発散などが出現することを理論的に明らかにした。この手法は2次元以上に拡張することはまだできていないが、一般次元のハミルトン系に出現する補足時間の log-Weibull 分布の指数依存性から多くの統計量の異常分布(大偏差特性)を評価する上で非常に意義のある結果とされている。開放系のエルゴード特性の探求では、熱伝導と運動量輸送に関する多体ハミルトン系(格子振動系、剛体球分子系)を扱い、エントロピー生成に関する分布関数と局所的不安定指数(リヤプノフ指数)の解析を行い、局所的カオスが定常状態の実現とゆらぎ定理の基盤になっていることを確認し、ゆらぎ定理が保証するフーリエ則が非線形性を一般に示すことを高次のモーメントまで考慮することによって理論的に示し、計算機実験によってほぼ確認することにも成功した。また運動量輸送に生じる非散逸的輸送量(虚数部分)に対しても同様の結果を導くとともに、新しいタイプのゆらぎ定理の存在を暗示する計算結果を得たことは、リヤプノフ指数に基礎を置いたこれまでのカオス解析の考え方に変更を迫るものと思っている。以上のほかに、熱伝導・運動量輸送に関するシミュレーションにおいて、通常のフーリエ則が成立するには、いくつかの条件(例えば非線形パラメータが十分に大きいなど)が必要であることも、まだ定性的な段階であるが、いくつか得ており、今後のより精密な研究の基礎となる重要な結果とされている。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	2,200,000	0	2,200,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	3,600,000	420,000	4,020,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学 ・ 数理物理 ・ 物性基礎

キーワード：非平衡・非線形物理学

## 1. 研究開始当初の背景

ハミルトン力学系はボルツマンのエルゴード仮説の端緒となった対象であるが、今なお謎に満ちた構造を内蔵しており、近年急速に注目を集めてきた非双曲的力学系の典型的な例となっている。双曲的カオス力学系については1990年代にほぼ完全にエルゴード論的性質は解明されたが、相空間の中に可積分領域(トーラス)と非可積分領域(カオス)がフラクタル的に分布するハミルトン力学系では拡散や再起現象の異常特性、 $1/f$  スペクトルの出現、さらに相関関数自身のゆらぎなどが一般的に観測され、従来のエルゴード定理(パーコフ定理)が成立しない対象とみなされるようになった。このような現象に対して、2000年代に入って数学分野で発展した無限測度エルゴード定理(Darling-Kac-Aaronson 定理)とハミルトン系の異常エルゴード性との類似性も指摘されるなど、エルゴード問題を新たな視点から問い直す動きも見られるようになった。本研究では無限測度系の視点を取り入れて相空間の測度論的構造を探る一方で、エルゴード問題を非平衡開放系の中で問い直すことが必要であろうとの考え方の下で、“非平衡条件下における物理的に意味のあるエルゴード的測度(Sinai-Ruelle-Bowen 測度)は何か”というもう一つの問題意識で、これまでのエルゴード的現象を整理するとともに、新たな“非エルゴード的現象の発見”を目指した。

## 2. 研究の目的

本研究ではエルゴード問題を上述の方針の下で次の二つの方向で探求した

(1)相空間における測度論的構造から生み出される統計法則の探求。

従来の研究ではトーラス近傍の淀み運動が原因となり長時間相関を生じ、無限測度系と同様の再起時間の発散をもたらすと考えられてきた。近年、再起時間が log-Weibull 分布に従うことも広く認識されてきたが、その一方で、不変測度はリュウビル測度に従うというハミルトン系の制約からその解釈に疑問も投げかけられていた。ここでは、漸近極限でリュウビル測度を不変測度に持つ力学系で非正常カオスが発生し、ハミルトン系類似の異常エルゴード性が出現することを

明かにするとともに、無限測度系との関係を理論的に解明する。

(2)定常状態でのエルゴード論的性質の探求

定常状態も含めて一般の非定常条件下に置ける測度論的構造は現在のところまったく解明できていない。しかし、統計力学の知見によれば、いわゆる揺らぎ定理がエルゴード的構造を探る重要な糸口の一つと考えられる。先に述べた孤立ハミルトン系の示す異常エルゴード性が揺らぎ定理にどのように反映するのか、また、どのような場合に通常の揺らぎ定理を保証するのか、モデル系によって揺らぎ定理の数値的検証を通して開放系に置ける新たなエルゴード問題を明かにする。

## 3. 研究の方法

(1) 相空間における測度論的構造の研究では、カオスとトーラスの境界領域に注目し、そこでの軌道の補足時間の統計則と、いくつかの特性量の大偏差特性(リュブノフ指数およびパワースペクトル密度)の関係を計算機実験と理論計算(更新理論)から明らかにする。はじめにカオスとトーラスの境界がスムーズ(非フラクタル)曲面である場合(補足時間が逆べき分布)の結果をハミルトン化した1次元モデルとマッシュルームピリアード系の例で示す。次に境界がフラクタル(ファットフラクタル)の場合(補足時間が log-Weibull 分布)の結果をハミルトン化した log-Weibull 写像とスタンダードマップの例で示す。

(2) 定常状態でのエルゴード論的性質の研究では、温度差をもつ二つの熱浴の間に置かれたハミルトン系の例として、剛体球分子モデルと非線形格子振動模型(FPUモデル)を考える。非平衡系一般に共通する問題として、熱浴の種類が定常状態の実現にどのような影響を及ぼすか、を理解することが重要である。また、散逸的輸送成分と非散逸的成分にわけて揺らぎ定理の詳細を明らかにすることが必要である。この為、熱浴間の熱伝導の場合と、周期的なシェアを入れた運動量輸送の場合について揺らぎ定理の検証を行う。また、ランジュバン型熱浴と能勢・フーバー型熱浴との違いを明らかにするとともに、さらに定常

状態における局所リャプノフ指数分布を決定する。

#### 4. 研究成果

##### (1) 逆べき型相関関数の場合の結果

###### - マッシュルームピリヤード系の解析

マッシュルームピリヤード系は、トーラスとカオスが共存する保存力学系である。しかし、フラクタルトーラス構造を持たないため、比較的解析が容易である。まず、トーラス近傍からの脱出時間を基にポアンカレ断面上に無限分割を構成し(図3)、さらに、これを用いて脱出時間分布  $S_n^{in}$  が  $S_n^{in} \sim 1/n^3$  というべき則を満たすことを示した。さらに、これから相関関数がべき減衰 ( $1/n^3$ ) することを示した。

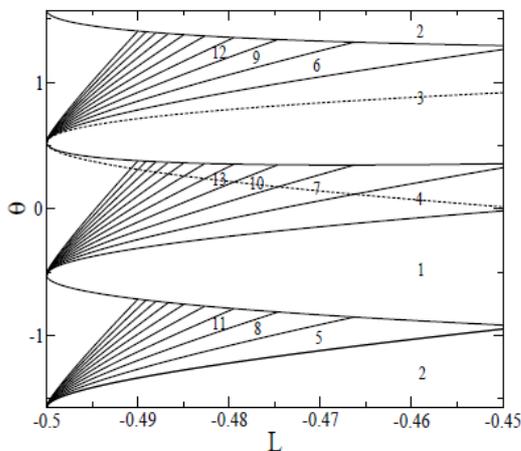


図1 マッシュルームピリヤード系のトーラス近傍に構成した無限分割。数字はトーラス近傍から脱出するのにかかる時間に相当する。

###### - ハミルトン化した抽象力学系の構成と理論解析

上の無限分割の性質をもとに、2次元写像力学系(非双曲パイコネ変換)を構成した、さらにそれを一次元に射影することによってハミルトン化した一次元系を導いた。この系について、その時間発展演算子(フロベニウス-ペロン演算子)のスペクトル解析を行い、(a)時間発展演算子の固有値スペクトルに連続スペクトルが表れること、(b)その結果として、長時間の相関が発生することを解析的に示した。

##### (2) カオス・トーラス境界がフラクタルの場合の結果

###### - ハミルトン化した log-Weibull 写像の解析

先に述べた非双曲的パイコネ変換のアイデアを拡張し、一様測度を不変測度にもつ1次元写像力学系をランベールの W-function の理論手法によって導出した。これによって補足時間が log-Weibull 分布に従うハミルト

ン系一般の統計測(大偏差特性)を統合的に整理することが出来るようになった。

Log-Weibull 分布の指数に依存して、パワースペクトル、相関関数、アラン分散指数などを理論的に理解できるようになった点は著しい進歩であった。また、無限測度エルゴード理論と対照すると、ハミルトン化した log-Weibull 系は、非定常カオスの Onset 点の多様性の典型的な1つのクラスになっていることがあきらかになった。さらに、まだ理論的には導出できていないが、パワースペクトル密度の分布関数が非定常カオスの場合と類似の  $\gamma$ -分布関数にほぼ従うことも数値計算から得られており、今後の課題を示すものとなった。

###### - 写像ハミルトン力学系の場合のリャプノフ指数の解析

上の log-Weibull 写像の結論をスタンダード写像に関して詳しく検討し、 $1/f$  スペクトルやスペクトルの  $\gamma$ -分布関数を実際に確認した。補足時間の分布が log-Weibull 的であることはこれまで知られている結果と同じであるが、その主張をさらに強める結果が得られたことは意義深い。さらに、これまで十分に研究されてこなかったリャプノフ指数の分布(大偏差特性)の数値計算を進め、スタンダード写像の場合も、また log-Weibull 写像の場合と同様 Levy 分布で近似できる可能性があることが示された。

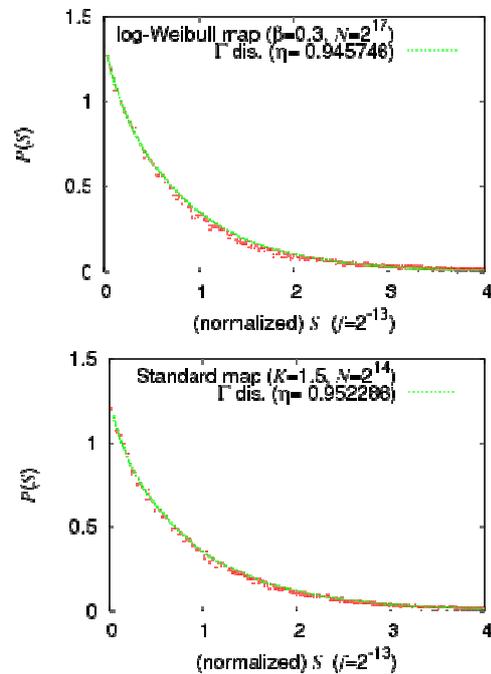


図2 スペクトル密度の  $\gamma$ -分布 ( $f = 2^{-13}$ )

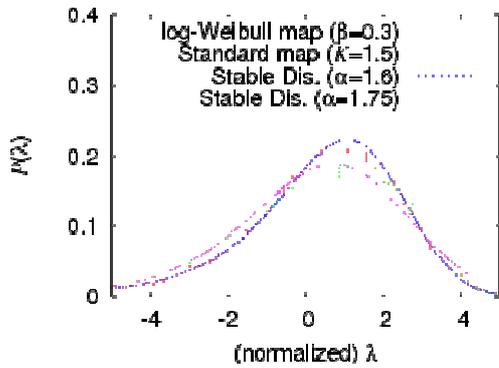


図3 リャプノフ指数の分布関数

### (3) 揺らぎ定理に関する研究

#### - 非線形応答公式の数値的検証

線形応答理論の非線形応答領域への拡張が、Andrieux と Gaspard により導出されている(2007)。そこで、まず異なる温度の確率的熱浴に接する剛体球系において、熱伝導の非線形応答特性を調べた(図1)。図1に示すように、非線形応答の存在が確認できた。また、非線形応答公式の予測と極めて良く一致することを確かめることができた。

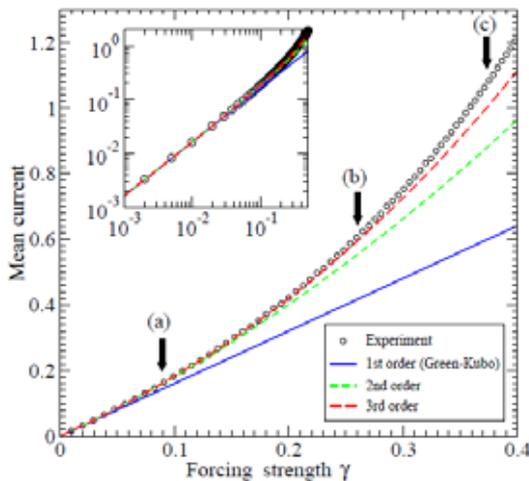


図4 剛体球系における、熱流 vs 熱力学的力 (circle)。実線は線形応答公式、破線は非線形応答公式の予測値。この例では、3次元程度の非線形応答が現れていることが分かる。

#### - 周期摂動の下での非線形応答

次に、周期的なシアを加えた剛体球系について、運動量輸送の性質を調べた。線形応答理論においてよく知られているように、周期摂動の場合、応答には位相シフトのようなエントロピー生成に寄与しない成分が生じる。また、非線形応答領域では、高調波成分が現れるが、これらもエントロピー生成には寄与しない。そこで、運動量流をエントロピー生成に寄与する「散逸成分」と、寄与しない「非散逸成分」それぞれについて(すなわち、フーリエ成分ごとに)、応答と揺らぎの関係を

数値的に調べた。

#### \* 散逸成分

まず、応答(実線)に非線形性が現れていることが分かった。また、応答(実線)と、揺らぎの性質(square)がよく一致することが確かめられた。(ここで、揺らぎの性質は、運動量流の相関関数の積分で与えられる。)ただし、この結果は揺らぎ定理の予測通りである。

#### \* 非散逸成分

次に、位相シフト[]と高調波成分[]についても同様の結果をプロットした。これらの場合についても、散逸成分と同様に、応答 - 揺らぎ間の関係が確認できた。すなわち、エントロピー生成に寄与しない非散逸成分についても、揺らぎ定理に類似した関係の存在が確認できた。

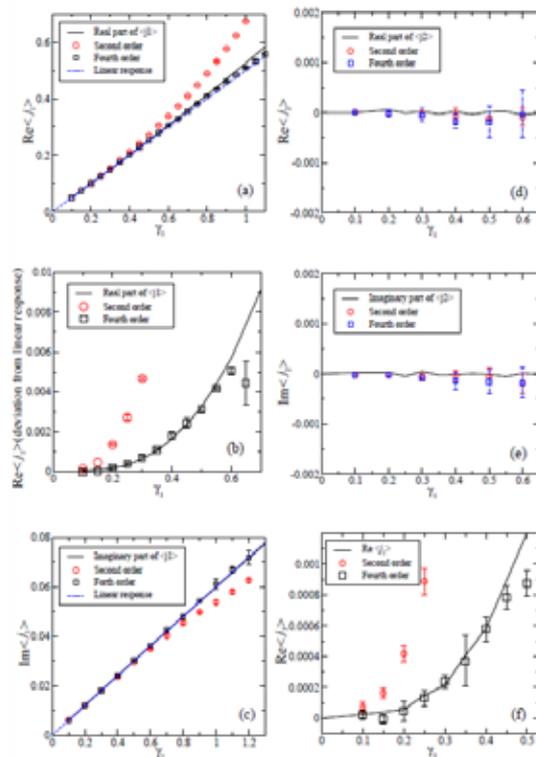


図5 剛体球系における、運動量流のフーリエ成分 vs 熱力学的力(実線)。Squares は揺らぎの性質を表す(3次近似)。(a)、(b)は散逸成分についての結果。それ以外は、非散逸成分についての結果。

### (4) 格子振動系の揺らぎ定理に関する研究

#### - ゆらぎ定理の検証

- FPU モデル一次元の非線形格子振動系に両端にランジバン型熱浴をつなげる。

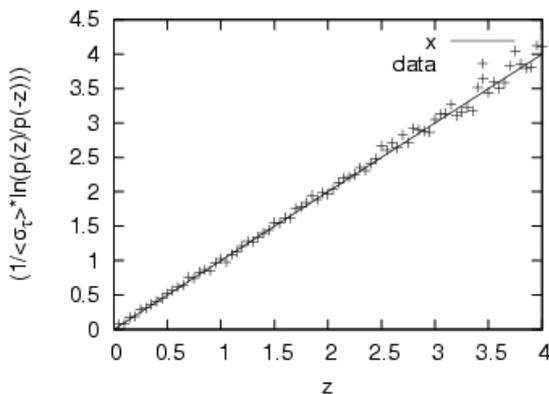
$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= p_i \quad (i=1, \dots, N) \\ \dot{p}_1 &= F(q_2 - q_1) - F(q_1 - q_0) - \eta p_1 + \xi(T_1) \\ \dot{p}_i &= F(q_{i+1} - q_i) - F(q_i - q_{i-1}) \quad (i=2, \dots, N-1) \\ \dot{p}_N &= F(q_{N+1} - q_N) - F(q_N - q_{N-1}) - \eta p_N + \xi(T_2) \\ F(x) &= x + \beta x^3, \quad q_0 = q_{N+1} = 0(\text{fixed}) \end{aligned}$$

計算結果：

\* 従来から知られているように熱浴との境界で温度ギャップが生じるが以下の測定量に対して、エントロピー生成の分布  $P(z)$  が十分精密にゆらぎ定理に従うことを確認できた。

$$\begin{aligned} J(t') &= \frac{1}{2} (p_1 F(q_2 - q_1) + p_{N-1} F(q_N - q_{N-1})) \\ \bar{J}_\tau(t) &= \int_t^{t+\tau} J(t') dt' \\ \sigma_\tau(t) &= \bar{J}_\tau(t) \cong \bar{J}_\tau(t) \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right), \quad z = \frac{\sigma_\tau(t)}{\langle \sigma_\tau \rangle} \\ \frac{1}{\langle \sigma_\tau \rangle} \ln \frac{P_\tau(z)}{P_\tau(-z)} &= z \\ (\tau \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(a)



(b)

	$1/\langle \sigma_\tau \rangle$	$\ln(p(z)/p(-z))$
0.1	1.020	
0.2	1.009	
0.3	1.011	
0.4	1.0085	
0.5	1.0085	
0.6	1.001	

0.7	1.021
0.8	1.023

図 6 (a) -FPU モデルにおける、 $\beta=0.5$  の時の揺らぎ定理の検証図。実線は揺らぎ定理から導かれる理論直線、点は観測値。(b) 各  $\beta$  の揺らぎ定理の検証時の勾配。

\* 能勢・フーバー熱浴に対しても、同様の計算を進めランジュバン熱浴と異なるフーリエ則が実現していることを示したが、ゆらぎ定理を確認することができた。

- 局所リアプノフ・スペクトルの解析

リアプノフスペクトルは、カオス不安定性の指標であると同時にエントロピー生成量として力学系の混合性（不可逆性）の強さの指標でもある。熱伝導に伴うエントロピー生成は、したがって背景にあるカオスの情報から導出されるべきであるが、現在のところその理論はまだ完成していない。ここでは局所平衡状態成立の背景となっている局所リアプノフ指数の大偏差特性の決定を格子振動系熱伝導に対して試み、局所温度（フーリエ則）がリアプノフスペクトルの極限分布と密接に関係していること（線形のサイト依存性）を数値計算により見出した。

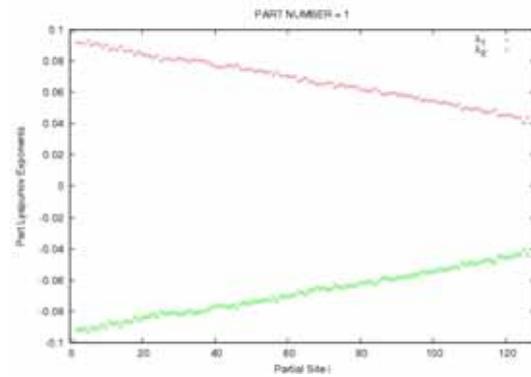


図 6 局所リアプノフスペクトルのサイト依存性

\* 定常状態のスペクトルと平衡状態のそれとを比較することで実際のエントロピー生成量を評価することが出来るがこの点は今後の課題として現在進行中である。

\* 熱浴との温度ギャップのくわしい分析も含めて格子振動の非線形性が充分小さくなると、フーリエ則全体が破綻する場合があります、この点も今後の計算により明らかにしたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 16 件)

1. T. Hasumi, T. Akimoto and Y. Aizawa, The Weibull - log Weibull distribution for interoccurrence times of earthquakes, *Physica A*, **388**, 491-498 (2009). (査読有)

2. S. Shinkai and Y. Aizawa, Ergodic properties of the Log-Weibull map with an infinite measure, *AIP Conf. Proc.*, **1076**, 219-222, 2008. (査読無)

3. T. Miyaguchi and Y. Aizawa, Spectral analysis and an area-preserving extension of a piecewise linear intermittent map, *Phys. Rev. E*, **75**, 066201 (2007). (査読有)

4. T. Miyaguchi, Escape time statistics in mushroom billiards, *Phys. Rev. E*, **75**, 066215 (2007). (査読有)

5. T. Miyaguchi, Sticking motions and 1/f fluctuations in a piecewise linear map, *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, **10**, 184-187 (2007). (査読有)

(他 11 件)

[学会発表](計 68 件)

国際会議(19 件)

1. Y. Aizawa, Universal features of non-stationary chaos, The 5th International Conference on Nonlinear Science, "Dynamics Days Asia Pacific 5", Nara (Japan), Sep. 9 - Sep. 12 2008.

2. T. Miyaguchi, Nonlinear responses in hard disk systems, NATO Advanced Research Workshop 'Recent Advances in Nonlinear Dynamics and Complex System Physics', Tashkent (Uzbekistan), Oct. 2008.

3. S. Shinkai and Y. Aizawa, Ergodic Properties for the Log-Weibull Map with a Uniform Measure, 7th International Summer School/Conference "LET'S FACE CHAOS THROUGH NONLINEAR DYNAMICS", Maribor (Slovenia), 29 June - 13 July 2008.

4. Y. Aizawa, On the Variety of Recurrence Phenomena in Chaotic Dynamics -Revisit to Hamiltonian Chaos from Infinite Ergodicity-, 7th International Summer School/Conference "LET'S FACE CHAOS THROUGH NONLINEAR DYNAMICS", Maribor (Slovenia), 29 June - 13 July 2008.

5. Yoji Aizawa, Weibull distributions in the multi-agent model for financial markets, The 9th Japan-Slovenia Seminar on

Nonlinear Science, Osaka City University (Japan), Nov. 2007.

(他 14 件)

国内学会発表(29 件)

1. 秋元琢磨, 新海創也, 相澤洋二, 非定常カオスを特徴付ける Lyapunov 指数の新しい定義, 日本物理学会第 64 回年次大会(立教大学)2009 年 3 月.

2. 津川暁, 新海創也, 相澤洋二, ハミルトン写像力学系の再帰時間特性, 日本物理学会 2008 年秋季大会(岩手大学)2008 年 9 月.

3. 添石喬裕, 新海創也, 相澤洋二, 定常・非ガウス領域の Large Deviation と極限分布, 日本物理学会 2008 年秋季大会(岩手大学)2008 年 9 月.

4. 相澤洋二, 遅い緩和を持つカオスの統計則, Dynamics of complex systems 2008 -- 数学的予測方式の可能性と諸分野からの二ズ -- (北海道大学), 2008 年 9 月.

5. 新海創也, 相澤洋二, 1 次元非双曲力学系の普遍的な統計則に関する数値的諸結果, 第二回 連成シミュレーションフォーラム(福岡)2007 年 2 月

(他 24 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

相澤 洋二 (AIZAWA YOJI)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号: 70088855

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

宮口 智成 (MIYAGICHI TOMOSHIGE)

大阪市立大学・工学部・特任講師

研究者番号: 10367071