

平成 21 年 5 月 15 日現在

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2006～2008

課題番号：18740005

研究課題名(和文) 数理物理学の視点からのカルタン型超リー代数の構造と表現に関する研究

研究課題名(英文) Study on structures and representations of Cartan type Lie superalgebras from view point of mathematical physics

研究代表者

古閑義之 (KOGA YOSHIYUKI)

福井大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号:20338429

研究成果の概要：本研究は、無限次元カルタン型超リー代数（コンフォーマル超代数）の表現論を主な研究対象とした。無限次元カルタン型超リー代数は、ヴィラソロ代数と呼ばれる最も重要な無限次元リー代数を含む超リー代数で、その表現論は、共形場の理論等の数理物理学において様々な応用をもつ。本研究では、最も基本的な無限次元カルタン型超リー代数である $N=1$ 超ヴィラソロ代数の表現論やその数理物理学への応用を中心に研究を行い、特に $N=1$ 超ヴィラソロ代数のフュージョン代数（共形場理論から定まる代数）の構造に関する結果などを得た。

交付額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|------------|----------|------------|
| 2006年度 | 800,000円 | 0円 | 800,000円 |
| 2007年度 | 1,000,000円 | 0円 | 1,000,000円 |
| 2008年度 | 700,000円 | 210,000円 | 910,000円 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 2,500,000円 | 210,000円 | 2,710,000円 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数一般

1. 研究開始当初の背景

本研究は、ヴィラソロ代数の超リー代数としての拡大であるカルタン型超リー代数（コンフォーマル超代数とも呼ばれる）を研究対象としている。これらの代数は、整数で次数付けされるような単純超リー代数のあるクラスであり、またその表現の指標に興味深いモジュラー関数が現れる。そのため、これらの代数の構造論と表現論は、数学において非常に興味深い対象である。一方、ヴィラソロ代数を部分代数として含んでいるため、共形

場の理論等の数理物理学においても重要な役割を果たす。

カルタン型超リー代数の特徴的な性質として、ヌブ・シュワルツセクターやラモンドセクター等のセクターの存在がある。カルタン型超リー代数を対称性とする共形場の理論等では、いくつかのセクターがまとまって理論の全体が構成されている。しかしながら、ヌブ・シュワルツセクター以外のセクターは、共形場理論の数学的な定式化である頂点作用素代数としては取り扱えないため、数学的

に系統だった研究は、本研究の開始以前には、充分にはなされていなかった。

2. 研究の目的

上述の様な研究状況を踏まえて、本研究では、ヌブ・シュワルツセクターに限定する事なく、無限次元のカルタン型超リー代数の表現論や、その数理論理学への応用に関して研究を行うことを目的としていた。

具体的には、

- (1) カルタン型超リー代数のヴァーマ加群の構造に関する研究
- (2) カルタン型超リー代数を対称性とする共形場理論のフュージョン代数に関する研究
- (3) ツイスト型アフィン超リー代数の構造に関する研究

を研究課題としていた。以下これらの課題に関して、説明を加える。

(1)の研究課題に関連して、申請者は2003年に発表した共同研究において、 $N=1$ 超ヴィラソロ代数のヴァーマ加群の構造を明らかにしていた。しかしながらその研究の中で、ある特殊な誘導表現（ヴァーマ加群への全射を持ったプレヴァーマ加群と呼ぶ）の構造は、未解決のまま残っており、このプレヴァーマ加群の構造解析は、一つの研究課題であった。

(1)の課題に関連しては、 $N=1$ 超ヴィラソロ代数のヴァーマ加群の構造に現れるある種の対称性を数学的に説明することも一つの課題であった。同様の対称性は、例えばアフィンリー代数のヴァーマ加群の構造の中にも見られ、これは、フェイギン・アルキポフ・ゾルゲルらにより、ある種の圏同値として数学的には理解されている。この圏同値を、カルタン型超リー代数の場合にも確立する事は、今後のカルタン型超リー代数のヴァーマ加群の研究に重要となると思われる。

(2)の課題に関して、申請者は2001年に発表した共同研究において、 $N=1$ 超ヴィラソロ代数を対称性とする共形場理論のフュージョン代数の構造定数を、ヌブ・シュワルツセクターに関しては、決定している。しかしながら $N=1$ 超ヴィラソロ代数のヌブ・シュワルツセクター以外のセクターであるラモンドセクターに関しては、2001年の時点では同様の結果を得ることはできなかった。その理由としては、構造定数の決定に必要な不可欠な役割を果たすヴァーマ加群の特異ベクトル公式が、ラモンドセクターに関しては、証明のみならず予想さえも得ることができ

なかった事が挙げられる。本研究の第一の研究目的である「ヌブ・シュワルツセクターに限定する事ない研究」のためには、最も基本的なカルタン型超リー代数である $N=1$ 超ヴィラソロ代数に関して、ヴァーマ加群の特異ベクトル公式の公式を予想・証明しておく事は非常に重要である。そこで、特異ベクトル公式の確立と、その応用としてラモンドセクターも含むフュージョン代数の構造の決定を目指す。

(2)の課題に関して、申請者が共同研究として発表した2001年の共同研究には、今後カルタン型超リー代数の共形場理論への応用を目指す上では、もう一点問題点があった。それは、この共同研究で用いたフュージョン代数の定義は、擬微分作用素を用いたものであったが、それが直ちには、他のカルタン型超リー代数の場合に一般化できないという点である。この問題点を解決するためには、他のカルタン型超リー代数へも適用可能な形で「より自然な」フュージョン代数の定式化が求められる。

(3)の研究課題にあるツイスト型アフィン超リー代数と本研究の主たる研究課題であるカルタン型超リー代数との関連について、最初に述べておく。

非ツイスト型のアフィン超リー代数の表現の圏が、カルタン型超リー代数のヌブ・シュワルツセクターの表現の圏と対応する事が、カツツ・ロアン・脇本らの研究により予想され、近年荒川氏により証明がなされた。この圏同値に関しては、アフィン超リー代数を非ツイスト型に換えてツイスト型を取る事で、アフィン超リー代数の表現の圏と、代ヌブ・シュワルツセクター以外のセクターの表現の圏とが対応すると予想されている。そのため、ツイスト型のアフィン超リー代数の表現論を展開する事も、本研究を遂行して行く上では重要なステップとなる。

しかしながらツイスト型のアフィン超リー代数に関しては、どのような代数があるのかさえ、充分には調べられていないのが現状である。そこで本研究では、すべてのツイスト型のアフィン超リー代数をまず中心拡大がない場合に具体的に構成し、更にそれらの中心拡大をすべて決定するという研究課題を設定した。

3. 研究の方法

先の研究目的の欄で述べた具体的な研究課題である

- (1) カルタン型超リー代数のヴァーマ加群の構造
- (2) カルタン型超リー代数を対称性と

する共形場理論のフージョン代数
(3) ツイスト型アフィン超リー代数の構造

について、その研究方法の詳細を述べる：

(1) まずプレヴァーマ加群の構造に関しては、プレヴァーマ加群がある特別なヴァーマ加群の拡大である事に注目する。短完全列の両側に現れるヴァーマ加群は、その構造が2003年の申請者らの研究で明らかにされているので、その構造を用いる事で、プレヴァーマ加群の構造を明らかにできるものと思われる。

(1) のもう一つの課題であるフェイギン・アルキポフ・ゾルゲルらによる圏同値の超リー代数版に関して、その研究方法を述べる。ここでは、アルキポフにより導入され、ゾルゲルの論文で整理された半正規両側加群を、超リー代数の場合に構成する事で、圏同値を与える。但し、ゾルゲルの論文では、簡明さのためある種の技術的な仮定がついているが、この仮定はカルタン型超リー代数の場合に適用するには、不適當ある。そのため最初にその技術的な仮定がない場合の半正規両側加群を通常のリー代数の場合に検討し、その結果を用いて、超リー代数版の構成を目指す。

(2) に関しては以下の3つのステップが必要である：

ステップ1：先の研究目的欄で述べた通り、フュージョン代数の、他のカルタン型超リー代数の場合にも拡張可能な形での「より自然な」定式化が求められる。そのため、擬微分作用素を用いるのではなく、超ベクトル場を用いて、フュージョン代数を定式化する。

ステップ2：フュージョン代数の構造定数の決定のためには、ラモンドセクターのヴァーマ加群の特異ベクトル公式の情報が欠かせない。そこで、数式処理ソフトを用いて、特異ベクトル公式の形を予想する事から始める。その際、多項式を成分とする2次の正方行列の因子分解を用いる点がこの研究の一つの特徴である。因子分解された形で特異ベクトル公式を表示しする予想を最初にあたえ、その予想を2003年の申請者らの共同研究の結果を用いて証明するという順序で、研究を進める。

(3) に関しては、最初に、セルガノバによる有限次元単純超リー代数の自己同型の分類を用いて、中心拡大のないツイスト型ループ超リー代数を具体的に構成する。更に、2005年の庵原氏との共同研究で得られていた第2コホモロジーに関する公式を適用す

る事で、ツイスト型ループ超リー代数の普遍中心拡大を決定する。通常のリアフィンリー代数の理論との類推から、こうして得られた普遍中心拡大が、ツイスト型のアフィン超リー代数を与えていると考えられる。

4. 研究成果

具体的な研究成果を、研究目的の項で述べた、各研究課題について述べる。

(1) カルタン型超リー代数のヴァーマ加群の構造に関して：

現リヨン大学教授の庵原謙治氏との共同研究として、

(A) プレヴァーマ加群の構造

(B) フェイギン・アルキポフ・ゾルゲルによる圏同値の超リー代数版の構成とそのカルタン型超リー代数の場合の具体的な記述

に関する2本の論文を発表した。

(2) カルタン型超リー代数を対称性とする共形場理論のフージョン代数に関して：

これも庵原氏との共同研究として、1本の論文を発表した。

(3) ツイスト型アフィン超リー代数の構造に関して：

現在も庵原氏との共同研究が進行中であり、現時点では研究成果の発表には至っていない。その理由は、2005年度の共同研究で発表した第2コホモロジーに関する公式を、今回必要な場合に具体的に適用する際、非常に膨大な計算が必要となるためである。その計算は、数式処理ソフトで実行する事が困難な種類の計算であるため、現時点では研究成果の発表には至っていない。

以下、本研究で得られた成果に基づいて執筆した論文（いずれも庵原氏と共同研究）の内容について具体的に述べる：

(1) The structure of pre-Verma modules over the $N=1$ Ramond algebra,

$N=1$ ラモンド超代数プレヴァーマ加群に関し、ヤンツェンフィルターの構造の決定、部分加群の分類、特異ベクトルの記述等を行った。

(2) Tilting equivalence for superconformal algebras

フェイギン・アルキポフ・ゾルゲルら

によりリー代数の場合に研究されていたある加群の間の圏同値を、カルタン型超リー代数の場合に適用可能な形で構成した。またその圏同値を具体的に記述するために必要となるコサイクルの計算を、いくつかのカルタン型超リー代数に対して行った。この論文で具体形を与えたコサイクルは、臨界コサイクルと呼ばれるもので、この情報は、今後の無限次元カルタン型超リー代数の表現論を研究にも有用と思われる。

(3) Fusion algebras for $N=1$ superconformal field theories through coinvariants $II+1/2$: Ramond sector

$N=1$ 超ヴィラソロ代数を対称性とする共形場理論のフュージョン代数の定式化を、超ベクトル場を用いて行った。更に、ラモンド代数の特異ベクトル公式の行列の因子分解を用いた表示を与え、それをヴェーマ加群の構造定理を用いて証明した。更に、特異ベクトル公式の情報を用いて、 $N=1$ 長ヴィラソロ代数のフュージョン代数の構造を、ラモンドセクターも込みで決定した。この結果は、ヌブ・シュワルツ以外のセクターも込みでフュージョン代数の構造が決定された、頂点作用素代数の数少ない例を与えており、今後のこの分野の研究にも寄与するものと期待される。

4. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

① K Iohara, Y. Koga, The structure of pre-Verma modules over the $N=1$ Ramond algebra, Letter in Mathematical Physics, 78, 89-96, (2006), 査読あり

② K Iohara, Y. Koga, Tilting equivalence for superconformal algebras, Mathematica Scandinavica, 99, 17-52, (2006), 査読あり

③ K Iohara, Y. Koga, Fusion algebras for $N=1$ superconformal field theories through coinvariants $II+1/2$: Ramond sector, International Mathematics Research Notices 印刷中 (2009) 査読あり

[学会発表] (計 2 件)

① Y. Koga, Singular vector formula for Kac-Moody Lie (super)algebras 研究集会 Vertex algebra in Tambara (東京大学玉原セミナーハウス) 2007 年 8 月

② Y. Koga, Fusion algebras for $N=1$ super Virasoro algebras 研究集会 「Algebras, Groups and Geometries 2008」(東京大学数理科学研究科) 2008 年 12 月

6. 研究組織

(1) 研究代表者

古閑 義之

福井大学・工学研究科・准教授

20338429