

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2006～2008

課題番号：18740016

研究課題名（和文）保型L関数および関連する球関数の研究

研究課題名（英文）Study on automorphic L-functions and related spherical functions

研究代表者

石井 卓 (ISHII TAKU)

成蹊大学・理工学部・准教授

研究者番号：60406650

研究成果の概要：多変数非正則保型形式のフーリエ展開を記述するために、実半単純リー群上の球関数の研究を様々な場合に行った。これら球関数は偏微分方程式系によって特徴付けられる。表現論的手法によりその方程式系を導出することから始め、保型形式への応用に耐えうる形でその解の積分表示を求めた。さらに、保型L関数への応用として、これら球関数の積分変換である、ゼータ積分の無限素点における計算を実行し、L関数の関数等式、正則性という大域的な結果を得た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	1,000,000	0	1,000,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	300,000	3,400,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：保型形式、保型L関数、Whittaker関数

1. 研究開始当初の背景

多変数保型形式やそれに付随するゼータ関数(=保型L関数)を調べる上で、保型形式のフーリエ展開はその研究の基礎となるべきものである。正則保型形式のフーリエ展開は古典的であるが、非正則保型形式に対しては、フーリエ展開に現れる特殊関数(=球関数とよぶ)は、偏微分方程式系によって特徴付けられ、その明示的な表示には一般に困難な解

析を要する。1990年頃から織田孝幸氏(東京大学)のグループを中心に、表現論的な手法を用いて、 $SU(n,1)$, $SL(3, \mathbb{R})$, $Sp(2, \mathbb{R})$, $SU(2, 2)$ といった階数が低いリー群上の球関数(Whittaker関数など)の明示公式の研究が行われてきた。これらの群上の様々な既約許容表現に対する球関数が、個別に調べられ、かなりの多くの結果を蓄積するに至った。さらにその結果を用いて、関数等式などの保型L関数の基本的性質もいくつかの

場合に得られていた。

2. 研究の目的

保型 L 関数の解析的性質を調べる二大手法の一つとして知られる Rankin-Selberg 法によって、保型 L 関数の大域的な結果を得ることを目指す。その研究の出発点は、ターゲットとなる L 関数の積分表示を発見し、それを大域的な球関数（大域的フーリエ係数）の積分変換、すなわち大域的ゼータ積分として表す基本等式を導くことにある。多くの場合、この大域的ゼータ積分は局所的ゼータ積分の積に分解し、各素点での研究が課題となる。それは次の二つのステップからなる。

- (A) 局所体上の代数群上の球関数の研究、特にその明示公式を与えること。
- (B) 球関数の積分変換である局所ゼータ積分を解析し、局所関数等式を導くこと。

Rankin-Selberg 法の研究は発見的であり、1970 年代の $GL(n)$ の L 関数に対する Jacquet, Shalika, Piatetski-Shapiro らの研究に始まり、これまでに多くの積分表示が見出されてきた。しかし、既存の研究の多くは不分岐有限素点における (A)、(B) の研究にとどまっており、分岐素点、無限素点における研究は、その困難さゆえに行われていなかった。従って、関数等式などの基本的な結果でさえ、満足な形で述べられていない。

そこで本研究では無限素点、特に実素点における研究に取り組んだ。

3. 研究の方法

研究の目的で述べたように実素点における球関数ならびに、局所ゼータ積分の研究を行った。

実リー群上の既約許容表現 π に付随する球関数を考える。球関数の研究の出発点は表現 π の特徴付けを用いて、球関数の満たすべき偏微分方程式系を導出することである。保型形式のフーリエ展開に現れるのは、この偏微分方程式系の解のうち、よい増大条件を満たすもので、それはしばしば定数倍を除いて一意に定まる。この解の明示的な積分表示を与えることがステップ (A) における最大の難関である。特に、局所ゼータ積分を計算する上では Mellin-Barnes 型の積分表示 (= ガンマ関数の積商の逆 Mellin 変換) が有用である。

ステップ (B) については、特殊関数の問題としては、球関数の積分変換の計算ということになるが、Barnes の補題が最も重要な

役割を果たす。また、表現 π のどのベクトルに対する球関数を用いると、Langlands パラメータから決まる期待されるべき局所 L 因子が出てくるかという問題がある。またゼータ積分が unipotent 積分と言われる積分を含む場合には、局所ゼータ積分は局所 L 因子と一致することが期待できず、その解析、具体的計算が困難になるが、関数等式、正則性などの性質を得ることは期待できる。

4. 研究成果

以下、本研究期間に得られた結果を群ごとにおいて記述する。

(1) $SL(n, R)$ 上の Whittaker 関数

$GL(n)$ 上の保型形式は Whittaker 関数のみを用いてフーリエ展開することが可能であり、Whittaker 関数の研究が重要になる。

クラス 1 主系列表現に対する Whittaker 関数の研究は Bump, Stade, Ishii らによる研究があったが、論文④において Eric Stade 氏 (Colorado 大学) と共同で群の階数についての、新たな帰納的な明示公式を得た。これまで我々が得ていたのは n と $n-2$ の間の関係式であったが、今回は n と $n-1$ の間のより自然なものである。

この結果を用いて、Stade によって既に計算されていた $GL(n) \times GL(n)$, $GL(n) \times GL(n-1)$ の L 関数に対する局所ゼータ積分の計算についての見通しのよい別証明が得られた。また、 $GL(n) \times GL(n-2)$ の場合を計算した。この場合は局所ゼータ積分は局所ゼータ因子とは一致しないが、局所関数等式を与えることができた (論文⑦などに報告してある)。

クラス 1 でない主系列表現に対する Whittaker 関数はベクトル値になるために、問題はかなり複雑になる。 $SL(3, R)$ の場合には、Manabe-Ishii-Oda (2004 年) により、主系列表現の構造を調べることで Whittaker 関数の偏微分方程式系を導出し、確定特異点のまわりでの級数解 (= 第 2 種球関数)、および保型形式のフーリエ展開に寄与する緩増加な Whittaker 関数 (= 第 1 種球関数) の積分表示が与えられていた。同様の手法で日名龍夫氏 (帝京大学)、織田氏との共同研究において $SL(4, R)$ へ拡張し論文⑨にまとめた。論文④の $n=4$ の式の自然な拡張として、Whittaker 関数の明示公式は Manabe-Ishii-Oda で得た $SL(3, R)$ の Whittaker 関数を用いて記述される。

さらに、この研究を通じて一般の

SL(n, R)での様子が見えてきた。

(2) 古典群上、例外群上のクラス1Whittaker関数

論文④の結果を他のリー群へ拡張する研究を進めた。B型古典群の場合には群の階数についての帰納的な明示公式を与えた。またC型とD型についてはクラス1Whittaker関数の間の関係式を保型形式のテータリフトを手がかりにして与えた。その結果は論文⑦に記載されている。

また論文⑩においては実階数が2の場合(SL(3, R), Sp(2, R), G₂(R))を統一的に扱い、Sp(2, R), G₂(R)のWhittaker関数をSL(3, R)のWhittaker関数を用いて表した。

これらの研究を通じて、球関数の明示公式を求めるための一つの指針が見えてきた。すなわち、微分方程式系の級数解である第2種球関数を適切な形で表示しておくことで、第1種球関数のMellin-Barnes型積分を予想できること、さらにその予想を証明するためには、第1種球関数を第2種球関数球関数の線形結合で表す式が有用であるということである。

(3) GSp(2)上の保型L関数

Sp(2, R)上の球関数についてはWhittaker関数、一般化Whittaker関数を含めて様々な場合に明示公式が知られていた。

論文①では、平野幹氏(愛媛大学)、織田氏と共同でSiegel-Whittaker関数とWhittaker関数を特殊関数の合流という観点から調べた。

論文⑥においては森山知則氏(大阪大学)と共同で主系列表現のWhittaker関数の明示公式(Ishii, 2005など)を利用して、スピノールL関数という4次のオイラー積を持つL関数の大域的な関数等式、正則性を証明した。

5次のオイラー積をもつスタンダードL関数については、一般化主系列表現のWhittaker関数の明示公式を用いた、Ginzburg-Rallis-Soudryのゼータ積分の計算を論文③に述べた。論文⑥、③のゼータ積分はunipotent積分を1次元含んでおり、局所ゼータ積分は局所L因子とBarnes積分の積になっている。

また論文⑩においては、クラス1主系列表現の場合に、GSp(2)×GL(3)の次数12のオイラー積を持つL関数、ならびにGSp(2)のスタンダードL関数に対する局所ゼータ積分を計算し、局所L因子との一致を見た。

(4) Sp(3, R)上のWhittaker関数

Sp(2, R)の場合でも既に問題は複雑であったが、さらに高階の群への拡張の一步として、平野氏、織田氏と共同でSp(3, R)上の一般化主系列表現に対するWhittaker関数を調べた。Sp(2, R)の場合と同様に、離散系列表現に対するWhittaker関数の研究の準備とみなすことができるが、直交群SO(3, 2)のクラス1Whittaker関数を用いて表示する式を見出し、論文⑤にまとめた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

- ① Miki Hirano, Taku Ishii and Takayuki Oda, Confluence from Siegel-Whittaker functions to Whittaker functions on Sp(2, R), Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 141 (2006), 15-31, 査読有.
- ② Taku Ishii, Class one Whittaker functions on real semisimple Lie groups, 京都大学数理解析研究所講究録1523, 保型表現, L関数, 周期の研究(2006), 70-78, 査読無.
- ③ Taku Ishii, Archimedean zeta integrals on GSp(4), Automorphic Forms on GSp(4), Proceedings of the 9th Autumn Workshop on Number Theory (2006), 65-74, 査読無.
- ④ Taku Ishii and Eric Stade, New formulas for Whittaker functions on GL(n, R), Journal of Functional Analysis, 244 (2007), 289-314, 査読有.
- ⑤ Miki Hirano, Taku Ishii and Takayuki Oda, Whittaker functions for P_J principal series representations of Sp(3, R), Advances in Mathematics, 215 (2007), 734-765, 査読有.
- ⑥ Taku Ishii and Tomonori Moriyama, Spinor L-functions for generic cusp forms on GSp(2) belonging to principal series representations, Transaction of the American Mathematical Society, 360 (2008), 5683-5709, 査読有.
- ⑦ Taku Ishii, Lie群上の球関数と保型L関数, 第53回代数学シンポジウム報告集, (2008), 190-201, 査読無.
- ⑧ Taku Ishii, 一変数保型形式に付随する保型L関数, 第16回整数論サマースクール報告集, (2008), 3-36, 査読無.

- ⑨ Tatsuo Hina, Taku Ishii and Takayuki Oda, Calculus of the principal series Whittaker functions on $SL(4, \mathbb{R})$, 京都大学数理解析研究所講究録別冊, to appear, 査読有.
- ⑩ Taku Ishii, Whittaker functions on real semisimple Lie groups of rank two, Canadian Journal of Mathematics, to appear, 査読有.

[学会発表] (計 8 件)

- ① Taku Ishii, Class one Whittaker functions on real semisimple Lie groups, Kempner Colloquium, 2006年9月11日, University of Colorado at Boulder.
- ② Taku Ishii, Archimedean zeta integrals on $GSp(4)$, 第9回整数論オータムワークショップ, 2006年11月9日, 白馬ハイマウントホテル.
- ③ Taku Ishii, Principal series Whittaker functions on $SL(4, \mathbb{R})$, 保型形式およびその周期の構成と応用, 2007年1月15日, 京都大学数理解析研究所.
- ④ Taku Ishii, Calculus of the principal series Whittaker functions on $SL(4, \mathbb{R})$, 日本数学会年会, 2007年3月30日, 埼玉大学.
- ⑤ Taku Ishii, Explicit formulas of Whittaker functions on real semisimple Lie groups, Representation Theory, Systems of Differential Equations and their Related Topics, 2007年7月2日, 北海道大学.
- ⑥ Taku Ishii, Lie群上の球関数と保型L関数, 第53回代数学シンポジウム, 2008年8月7日, いわて県民情報交流センター.
- ⑦ Taku Ishii, 一変数保型形式に付随する保型L関数, 第16回整数論サマースクール, 2008年8月18日, 幕張メッセ国際会議場.
- ⑧ Taku Ishii, Archimedean Whittaker functions and archimedean zeta integrals, 愛媛整数論集会, 2009年2月20日, 愛媛大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石井 卓 (ISHII TAKU)
 成蹊大学・理工学部・准教授
 研究者番号: 60406650