様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成21年3月31日現在

研究種目：若手研究(B)
研究期間：2006～2008
課題番号：１８７４００１７
研究課題名（和文）　ｐ進数体及び関数体上のＭａｈｌｅｒ関数の超越性と代数的独立性及びその応用
研究課題名（英文）　Transcendence and algebraic independence of Mahler functions over p-adic number fields and function fields and its applications

研究代表者
田中　孝明（TANAKA TAKAAKI）
慶應義塾大学・理工学部・助教
研究者番号：60306850

研究成果の概要：
p進数体上および関数体上のMahler関数の研究を通して，相異なるすべての代数点を例外なく代数的独立な値に写像する多変数関数を構成した。この関数はその特殊化が連分数表示をもち，フィボナッチ数列を例として含む線形回帰整数列により生成される。さらに，この関数を一般化したものについて，相異なる複数の代数点における値が代数的独立となる必要十分条件を記述した。そのような必要十分条件は２個の代数点間の同値関係であり，それに関する代数点の同値類は巡回群を成す。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006年度	700,000	0	700,000
2007年度	500,000	0	500,000
2008年度	400,000	120,000	520,000
年度			
年度			
総　計	1,600,000	120,000	1,720,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数的独立性、ｐ進数、Ｍａｈｌｅｒ関数、超越数、連分数、線形回帰数列、フィボナッチ数列

１．研究開始当初の背景

有理数体 $\mathbb{Q}$ 上代数的な数が成す体の構造解明を目指す代数的整数論，$\mathbb{Q}$ 上代数的でない複素数（即ち超越数）の代数的独立性などの数論的性質を追求する超越数論と並行し，素数 p に対する p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ 上の代数的整数論および超越数論，更には，関数体上の代数的整数論および超越数論も長い歴史を有し盛んに研究されている。

関数体上の数論は位数 $q(=p^n)$ の有限体 $\mathbb{F}_q$ を係数とする多項式環 $\mathbb{F}_q[t]$，有理関数体 $\mathbb{F}_q(t)$，Laurent 級数体 $\mathbb{F}_q((t^{-1}))$ をそれぞれ，整数環 $\mathbb{Z}$，有理数体 $\mathbb{Q}$，実数体 $\mathbb{R}$ の類似物とみなして展開され，$\mathbb{Q}$ 上の数論の標数正のヴァージョンといえる。

Mahler関数の理論は $\mathbb{Q}_p$ 上の超越数論において著しい成果を上げている理論のひとつである。Mahler関数の特殊値の代数的独立性判定定理を応用し，フィボナッチ数列を含む２階の線形回帰整数列 $\{R(n)\}_{n\geq 0}$ の等比数

列 $\{ap^k\}_{k\geq 0}$ に対応する部分列 $\{R(ap^k)\}_{k\geq 0}$ の逆数和 $\sum_{k\geq 0} x^k/(R(ap^k))$ （x は 0 以外の代数的数を任意に動く）の形で，Q 上代数的独立な可算無限個の複素数が構成できることを研究代表者は従来の研究において示した。このような線形回帰整数列の逆数和の数論的性質については多くの研究者による先行研究が存在し一大テーマといえる状況だが，p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ 内の収束級数を同様に構成した場合の数論的性質については，次に述べるものを除いて殆ど着手されず未解決のまま残されていた。

P.T. Young は Lucas 数列 $\{L_n\}_{n\geq 0}$ により生成される対数関数型の冪級数 $\sum_{n\geq 1} L_n z^n/n$ が乗法的形式群の Z 上の強同型を与えることを示した。これは $\{R(ap^k)\}_{k\geq 0}$ を $\mathbb{Q}_p$ の数列として考察することにより得られた結果であった。

２．研究の目的

p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ 上および関数体上の Mahler 関数の超越性・代数的独立性及びその応用を研究することが本研究の目的である。具体的には次のように述べることができる。

p 進解析および関数体の付値を用いて展開される Mahler 関数の理論から得られた著しい成果のひとつとして，相異なるすべての代数点を例外なく代数的独立な値に写像する解析関数を構成できることが知られている。これは応用上も重要な関数である。しかしながら，従来知られていたそのような性質を有する関数は１変数関数であり，多変数関数の実例は至って人為的なものしか構成できていなかった。従って，多変数関数であって，そのような著しい数論的性質をもつものを，q-analogue のような自然な形で与えることが本研究の目的である。

一方，Mahler 関数の理論を展開する上での基礎となるのは，Mahler 関数自身が有理関数体上超越的あるいは代数的独立となることである。それを判定するにあたって最も有効なもののひとつは Kubota による Mahler 関数の有理関数体上での代数的独立性判定定理である。しかし，この定理はこれまで１変数の場合についてのみ有効な応用例が知られていた。その一方で，Kubota の定理は１変数に限らず多変数の Mahler 関数の代数的独立性を判定できる。それにもかかわらず，多変数関数に対して Kubota の定理を有効に活用した実例は皆無であった。従って，多変数 Mahler 関数であって，Kubota の定理を有効利用できるものを与えることも本研究の目的である。

また，関数体上の Mahler 関数の実例として 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の有理関数で非常に良く近似される超越関数が得られることが期待され，これは将来，符号理論さらには暗号理論に応用できる可能性があると考えられる。

３．研究の方法

本研究の主たる研究方法であった Mahler 関数の理論を解説する。$\Omega=(\omega_{ij})$ を非負整数を成分とする n 次正方行列とする。$\mathbb{C}^n$ の点 $\mathbf{z}=(z_1,\ldots,z_n)$ に対する Ω の乗法的作用を $\Omega\mathbf{z}=(z_1^{\omega_{11}}\cdots z_n^{\omega_{1n}},\ldots\ldots,z_1^{\omega_{n1}}\cdots z_n^{\omega_{nn}})$ で定義する。n 変数 $z_1,\ldots,z_n$ の解析関数 $f(\mathbf{z})$ が $f(\Omega\mathbf{z})$ と有理関数体 $\mathbb{C}(\mathbf{z})$ 上代数的従属であるとき，即ち $f(\mathbf{z})$ と $f(\Omega\mathbf{z})$ を含む $\mathbb{C}(\mathbf{z})$ 係数の関数方程式をみたすとき，$f(\mathbf{z})$ は Mahler 関数と呼ばれる。特に，１変数 Mahler 関数の定義は次のように簡潔に述べられる。

ベキ級数 $f(z)$ であって固定された 2 以上の整数 d に対して $f(z^d)$ と有理関数体 $\mathbb{C}(z)$ 上代数的従属であり，かつ正の収束半径を有するものを １変数 Mahler 関数と呼ぶ。その実例はマンデルブロ集合の補集合から単位円の外部への等角写像，有限オートマトンの生成する数列の母関数など極めて豊富である。研究代表者はこれまで Mahler 関数の研究の一端を担ってきた経緯があり，その基盤の上で本研究を遂行した。具体的には，p 進数体及び関数体上の超越数論研究の基礎をなすディオファンタス近似の諸結果を CIRM（マルセイユ）での研究集会および整数論サマースクール等において調査し，また，フィボナッチ数列の部分級数の逆数和及び 解析関数の相異なる代数点における値の代数的独立性の研究手法を応用して研究を進めた。

研究の第１段階ではフィボナッチ数列を含む２階の線形回帰整数列 $\{R(n)\}_{n\geq 0}$ の，公比 p の等比数列 $\{ap^k\}_{k\geq 0}$ に対応する部分列 $\{R(ap^k)\}_{k\geq 0}$ の $\mathbb{Q}_p$ における極限値の数論的性質の解明を目指した。そのために用いた方法は，極限値を１変数 Mahler 関数の特殊値に帰着させることであった（この目的のために構成する Mahler 関数を以下，該当する Mahler 関数と呼ぶ)。つまり，１変数 Mahler 関数の定義に現れる d として素数 p をとった場合に相当する。P.T. Young が扱った $\{R(n)\}_{n\geq 0}$ がフィボナッチ数列と同様の強整除性，即ち m が n を割り切るならば $R(m)$ は $R(n)$ を割り切るという性質，を有する場合には該当する Mahler 関数の特殊値は $\mathbb{Q}_p$ において Q 上代数的な数となる。この場合は，極限値の数論的性質を該当する Mahler 関数が有理関数となることを用いて研究した。

研究の第２段階では $\{R(n)\}_{n\geq 0}$ が強整除性を有さない場合の極限値の数論的性質の解明を目指した。この場合は該当する Mahler 関数がみたす関数方程式は強整除性を有する場合と比べて複雑なものとなり，困難が

生じた。

関数体上の Mahler 関数及びその特殊値の超越性・代数的独立性の研究方法は次のようであった。標数 p の有限体 $\mathbb{F}_q$ を係数とする関数体上の Mahler 関数を考える場合，１変数Mahler関数の定義に現れる d のとり方は上述の $\mathbb{Q}_p$ 上の Mahler 関数とは対照的である。$d=p$ の場合，Mahler型の関数方程式の解は「４．研究成果」で述べるような限られた関数のクラスであることが，CIRMでの研究集会における討論を通して判明したため，関数体上の Mahler関数の場合，d は p と互いに素なものを扱う必要があった。従って，$\mathbb{Q}_p$ 上の Mahler 関数に対して用いたものと類似の方法はこの場合には利用できなかった。

また，CIRMでの研究集会において行なった P. Bundschuh氏，F. Pellarin氏との２階の Mahler 型関数方程式の解空間の構造についてのディスカッションをもとに，$\mathbb{Q}_p$ 上および標数正の関数体上の場合も含めた Mahler 関数の研究を進めた。

４．研究成果

初年度の研究では，フィボナッチ数列を例として含む線形回帰整数列 $\{R(\mathrm{n})\}_{\mathrm{n}\geq 0}$ の，公比が素数 p の等比数列に対応する部分列 $\{R(ap^k)\}_{k\geq 0}$ の p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ における極限値の数論的性質を研究した。その結果，この極限値は p 進数体上の Mahler 関数の特殊値に帰着可能なp進収束級数であり，$\{R(\mathrm{n})\}_{\mathrm{n}\geq 0}$ がフィボナッチ数列と同様に m が n を割り切るならば $R(m)$ は $R(n)$ を割り切るという強整除性を有する場合には $\{R(ap^k)\}_{k\geq 0}$ の $\mathbb{Q}_p$ における極限値は $\mathbb{Q}_p$ の円分拡大体に属する数であることが分かった。また，$\{R(\mathrm{n})\}_{\mathrm{n}\geq 0}$ が強整除性をもたない線形回帰整数列である場合でも $\{R(ap^k)\}_{k\geq 0}$ の $\mathbb{Q}_p$ における極限値は，それが存在すれば $\mathbb{Q}_p$ の円分拡大体に属する数となるため，$\mathbb{Q}$ 上と同様に $\{R(ap^k)\}_{k\geq 0}$ を用いて超越数を構成するためには新たなアプローチが必要である。

一方，関数体上の Mahler 関数の構成に関しては，標数正の関数体上超越的な Mahler 関数の実例は現在のところ有理関数の対数という形の関数以外は未発見であることが分かった。これは，標数正の関数体上の Mahler 関数の研究が本質的な困難を内包するものであることを意味している。つまり，標数正の関数体上では対数関数に由来するもの以外の数の数論的性質の解明は今のところ困難であり，$\mathbb{Q}$ 上の超越数論とは大きく異なる状況にある。

また，２階のMahler型関数方程式の解空間の構造について，研究代表者はそのような関数方程式をみたす関数の具体例を得た。それは，フレドホルム級数と類似した各項の指数に等比数列が現れる形の複素連分数として表現される Mahler 関数であり，研究代表者はそれを行列関数の無限積として表現する方法を発見した。連分数表示をもつ関数の行列無限積表示は一般的だが，Mahler関数に限っては１変数の場合でさえも行列無限積で表現される関数についてはほとんど何も分かっていないのが現状であり，自然な実例が発見されたこと自体が有意義である。この問題は特に $\mathbb{Q}_p$ 上において重要な意味を持つ。後に述べるように $\mathbb{Q}_p$ における連分数は p 進 L 関数の特殊値に代表されるように意義深いものである一方で，その性質については纏まった理論は形成されていない。従って，$\mathbb{Q}_p$ 上の行列無限積型 Mahler 関数は今後の重要な研究課題である。

第２年度の研究では，多方面への応用が知られている q -series の代表的なものである q -超幾何関数に類似した３変数の解析関数 $\Theta(x,a,q)$が次に述べる性質をもつことを，p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ 上のMahler関数の理論を応用して証明した。即ち，$\Theta(x,a,q)$ は相異なるすべての代数点 (x,a,q) を例外なく代数的独立な値に写像し，さらに，２変数関数 $\Theta(a,a,q)$ は非正則な連分数として表示できる。しかも，$\Theta(x,a,q)$ は線形回帰数列により生成され，最も簡単な実例はフィボナッチ数列を用いて構成できる。従って，$\Theta(x,a,q)$ は最も簡単な場合でさえ，q -超幾何関数の Fibonacci analogue とみなすことができ，種々の応用例を有することが期待される。また，この結果の証明で用いた補助関数は従来の研究で扱われていたものより複雑な形をした Mahler 関数であり，それらが関数体上で代数的従属となる必要十分条件を，$\Theta(x,a,q)$ を生成する線形回帰数列がみたす条件として記述することがキーポイントであった。$\Theta(x,a,q)$ が相異なるすべての代数点 (x,a,q) を例外なく代数的独立な値に写像するという性質は $\Theta(x,a,q)$ を生成する線形回帰数列に課した条件によってもたらされるものであり，より一般の線形回帰数列により生成される $\Theta(x,a,q)$ の相異なる複数の代数点における値が代数的独立となる必要十分条件を得ることが最終目標となった。

最終年度の研究では，上述のような必要十分条件を得ることに成功した。この結果は，「２．研究の目的」で述べたような状況にあった，Mahler関数の有理関数体上での代数的独立性についての Kubota の判定定理を，多変数 Mahler 関数に対して最大限に有効利用した初めての例である。即ち，より一般の線形回帰数列により生成される $\Theta(x,a,q)$ の相異なる複数の代数点における値が代数的従属となる必要十分条件を記述することができた。その結果，そのような必要十分条件は２個の代数点間の同値関係であり，更

に，この同値関係による代数点の同値類は乗法に関して巡回群を成すことが分かった。これは，代数点 (x,a,q) の集合の Θ による像を代数的従属性による同値類に分割したとき，各同値類の逆像がどのような構造を持っているかを明らかにするものである。この結果は，これまでほとんどその構造が見出されていない超越数の世界にひとつの構造を与える契機となり得るという点からも極めて意義深い。

また，$\Theta(x,a,q)$ を特殊化した $\Theta(a,a,q)$ は明示的な連分数表示をもつが，これは p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ 上の整数論において極めて重要である。例えば，p 進 L 関数の特殊値が明示的な連分数表示をもつことが Stieltjes により示されているが，その応用例として次のものが知られている。Calegari はある種の p 進保型形式の overconvergence を用いて p 進ゼータ関数の特殊値の無理性を証明したが，Beukers はその別証明を Stieltjes の連分数表示から導かれる Padé 近似と呼ばれる解析数論における強力な道具を構成することにより与えた。このように p 進数体上の関数の特殊値について無理性，超越性，代数的独立性等の数論的性質を研究する場合，特殊値が明示的な連分数表示を有することが重要である。その点からみて本研究の成果は，明示的な連分数表示をもつ特殊化を含む解析関数 $\Theta(x,a,q)$ の値が代数的独立となる必要十分条件を，$\mathbb{Q}_p$ の諸性質を用いて証明された Mahler 関数の理論を用いて導いたという点で，本研究の目的を達したものと言える。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　４件）

[1] T. Tanaka: Remarkable algebraic independence property of certain series related to continued fractions, AIP Conference Proceedings **976**, Diophantine Analysis and Related Fields 2007/2008, American Institute of Physics, 2008, pp. 190－204 (査読無し).

[2] 田中 孝明: Mahler–Manin 予想の解決と Mahler 関数 — Mahler の方法による超越性・代数的独立性の証明へのイントロダクション —，第 14 回 整数論サマースクール報告集，2008 年，44－66 頁 (査読無し).

[3] T. Tanaka: Algebraic independence of a certain series and its subseries with subscripts in a geometric progression, Seminar on Math. Sci. No. 35, Diophantine Analysis and Related Fields 2006, Keio Univ., 2006, pp. 175－185 (査読無し).

[4] 田中 孝明: Algebraic independence of the values of certain functions at distinct algebraic points，数理解析研究所講究録 **1511**，解析的整数論とその周辺 (Analytic Number Theory and Surrounding Areas)，京都大学数理解析研究所，2006 年，10－18 頁 (査読無し).

〔学会発表〕（計　３件）

[1] T. Tanaka: Algebraic independence of certain series involving continued fractions and generated by linear recurrences，解析的整数論の新しい展開 (New Aspects of Analytic Number Theory)，京都大学数理解析研究所，2008 年 10 月 27 日.

[2] T. Tanaka: Remarkable algebraic independence property of certain series related to continued fractions, Diophantine Analysis and Related Fields 2008，同志社大学，2008 年 3 月 6 日.

[3] 田中 孝明: Mahler–Manin 予想の解決と Mahler 関数，第 14 回 整数論サマースクール，静岡県伊豆の国市，2006 年 8 月 15 日.

６．研究組織
(1)研究代表者
田中　孝明（TANAKA TAKAAKI）
慶應義塾大学・理工学部・助教
研究者番号：60306850
(2)研究分担者
該当なし
(3)連携研究者
該当なし