

平成21年 5月22日現在

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2006～2008

課題番号：18740021

研究課題名(和文) ビルディングブロックの有理的ねじれ群

研究課題名(英文) The group of the rational torsion points of a building block

研究代表者

西来路 文朗 (SAIRAIJI FUMIO)

広島国際大学・工学部・准教授

研究者番号：40352025

研究成果の概要：本研究の目的は、① $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線の有理的ねじれ群に関する Mazur の定理の $\mathbb{Q}$ 曲線への一般化と②ビルディングブロックの有理的ねじれ群の universal boundness 予想の定式化である。

本研究助成により、①については中心的 $\mathbb{Q}$ 曲線の場合にはほぼ完全に解決し、JNTB誌において発表した。②については、ビルディングブロックの有理的ねじれ群のデータを集めるために、Brumerによる $GL_2$ -typeのJacobi多様体の族に関して、ゼータ関数を計算した。形式群を用いた代数的にゼータ関数を計算する方法を開発した点が新しい。

今後、得られたデータを解析し、ビルディングブロックの universal boundness 予想を定式化したいと考えている。特に、ビルディングブロックの有理的ねじれ群の位数は次元のみによる定数で抑えられると期待している。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	500,000	0	500,000
2008年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	2,200,000	150,000	2,350,000

研究分野：数物系科学(数学)

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：数論、Abel多様体

## 1. 研究開始当初の背景

代数体上定義された Abel 多様体の有理的ねじれ群の位数は、Abel 多様体の次元と定義体による定数で抑えられる、という予想が universal boundnes 予想である。Abel 多様体が楕円曲線の場合には、定義体が $\mathbb{Q}$ の場合

に Mazur(1977)により、2次体の場合に Kenku-Momose(1988)により、一般の代数体の場合に Merel(1996)により、universal boundnes 予想が解決されている。

MazurやKenku-Momoseの結果は、有理的ねじれ群の構造も決定しているが、定義体

が一般の代数体である困難から、Merel の結果は有理的ねじれ群の位数の評価に留まっている。位数の評価は明示的であるが、非常に大きい。

一方、Taniyama-Shimura 予想の一般化に関連して、ビルディングブロックと呼ばれる、代数体上定義された Abel 多様体に関する研究が近年盛んである。Taniyama-Shimura 予想の下、ビルディングブロックとモジュラー多様体は同値である。また、1次元ビルディングブロックをQ曲線、Q上定義されたビルディングブロックを $GL_2$ -typeと呼ぶ。

筆者は、これまでの研究において、Q上定義された楕円曲線の形式群の本田理論をAbel 拡大体上定義されたビルディングブロックへ一般化した。従来、ビルディングブロックのゼータ関数は、Taniyama-Shimura 予想を仮定し、モジュラー形式を用いて解析的に求めていたが、筆者の結果により、形式群を用いて、代数的にゼータ関数を計算できるようになった。

この形式群の研究を通じて、Q上の楕円曲線に関する性質を定義体や次元に関して一般化する場合、ビルディングブロックを考える方が、自然ではと考えるに至った。代数体上のAbel 多様体を考えるのは、抽象度が高すぎるのである。

以上のような背景の下、ビルディングブロックの有理的ねじれ群の研究を開始した。

## 2. 研究の目的

(1) Mazur のQ上の楕円曲線の有理的ねじれ群に関する結果をQ曲線の場合に一般化し、Merel の結果を精密化することが第一の目的である。扱う楕円曲線をQ曲線に制限した場合、定義体によらない定数で抑えられる、と期待している。

(2) Q曲線のWeil 制限は $GL_2$ -type のAbel 多様体になり、ビルディングブロックは $GL_2$ -type のAbel 多様体の商になる。したがって、ビルディングブロックの有理的ねじれ群の位数は、定義体によらず、次元のみによる定数で抑えられる、と期待している。この定数を精密に求めること、すなわち、universal boundness 予想を定式化することが第二の目的である。

## 3. 研究の方法

Abel 多様体に関する代数幾何、整数論の専門書を本件研究助成により、収集し、知見を広める。また、数学会、代数学シンポジウムを始め、国内外の研究集会に積極的参加。研究交流をはかる。

海外の研究集会においては、Q上の楕円曲線の有理的ねじれ群の構造を決定した

Mazur、その2次対体への一般化を得たKamienny、Q曲線に関し多くの研究のあるLario、Quer 達に学ぶ、特に、研究動機、結果の一般化の歴史、formal immersion の理論について知見を広める。

本研究助成によるデスクトップパソコンを用いて、 $GL_2$ -type のJacobi 多様体のゼータ関数を計算し、有理的ねじれ群の位数の上からの評価を得る。この際、2次元 $GL_2$ -type のJacobi 多様体としては、MestreやBrumerによるJacobi 多様体の族、高次元Jacobi 多様体としては、モジュラー多様体を用いる。

## 4. 研究成果

### (1) Q曲線の有理的ねじれ群

Mazur により、Q上定義された楕円曲線の有理的ねじれ群は、15個の有限Abel 群のいずれかに同型であることが知られている。特に、有理的ねじれ群の位数を割る素数は、13以下である。この結果は、Kenku-Momoseにより、2次体上定義された楕円曲線の場合に一般化されている。さらに、Merelにより、代数体上定義された楕円曲線の有理的ねじれ群の位数が、定義体の次数のみによる定数で抑えられることが示されている。しかしながら、Merel の定数は非常に大きい。

本研究においては、 $(2, \dots, 2)$ 型拡大体上定義された中心的Q曲線の場合に、有理的ねじれ群の位数を割る素数を決定した。この場合、有理的ねじれ群を割る素数は、技術的な仮定の下、13以下である。したがって、筆者達の結果は、Q上の楕円曲線を扱ったMazurの結果の自然な一般化である。

さらに、共役なQ曲線との間の次数最小の同種射の次数が有理的ねじれ群の位数を割ると仮定すると、中心的Q曲線は、本質的に12個のタイプに分類されることを示し、これらのQ曲線の定義方程式を完全に決定した。

本研究は山内卓也氏との共同研究である。室蘭整数論集会(2006)等で講演、報告集にて発表を行う。2008年にJ. Nombre de Bordeaux 誌に掲載。

### (2) Abel 多様体の有理点のMordell-Weil 階数

代数体上定義されたAbel 多様体の有理点のなす群は、Mordell-Weil の定理により、有理的ねじれ群と有限階数自由Abel 群の直和になることが知られている。また、標数0の代数的閉体上定義されたAbel 多様体の有理点のなす群は階数無限の自由Abel 群を含む。

では、定義体をどのような無限次拡大体にとれば、有理点のなす群は階数は無限になるのだろうか。この素朴な問いに対し、Frey-Jardenは、代数体の最大Abel 拡大体を定義体にとり、有理点のなす群を考えれば、

階数は無限であろうと予想し、 $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線の場合に証明を得ている。さらに、Imai、Top、Moonらにより、 $\mathbb{Q}$ 上定義された超楕円曲線の Jacobi 多様体についても、予想が正しいことが知られている。また、Murabayashi、Rosen-Wrongは射影直線 $P^1$ の巡回被覆の Jacobi 多様体について、Frey-Jardenの予想が正しいことを示している。

本研究においては、①無限個 Abel 点を持つ代数体上で定義された代数曲線の Jacobi 多様体、② $GL_2$ -type の Abel 多様体の場合に Frey-Jarden の予想を解決した。①は  $P^1$  の Abel 被覆の Jacobi 多様体を含み、上記の既知の結果を含む。②は、Serre 予想の解決により証明された、一般化された Taniyama-Shimura 予想の応用で、これまでの系列とは異なる。

本研究は山内卓也氏との共同研究である。ガロア理論とその周辺 (2008) で講演。

### (3) Jacobi 多様体の形式群

標数 0 の体上で定義された楕円曲線の場合、形式群の構成には、加法公式を用いた構成と正則微分形式を用いた構成がある。加法公式を用いた構成は、Grant、Flynn により、種数 2 の超楕円曲線の Jacobi 多様体に一般化されている。Grant は、超楕円曲線が定義体上有理的な Weierstrass 点を持つと仮定した場合に、Flynn はこの仮定なしに、それぞれ、 $P^8, P^{15}$  への Jacobi 多様体の埋め込みを与え、定義方程式や加法公式を明示的に与え、Jacobi 多様体の形式群を構成している。

正則微分形式を用いた構成は、Freije により、代数曲線が定義体上有理的な Weierstrass 点を持つという仮定の下で、種数が 1 以上の場合に一般化されている。

さらに、Freije は代数曲線がモジュラー曲線  $X_0(N)$  で、 $i\infty$  が Weierstrass 点でない場合に、本田理論を用いて、構成された形式群がほぼ  $\mathbb{Z}$  上定義されることを示している。

本研究では、Freije の議論を一般化し、代数曲線の正則微分の局所変数による展開と Jacobi 多様体の形式群の強同型類の不変量 (特殊元) との関係を示した。また、代数曲線が超楕円曲線の場合に、Riemann-Roch Theorem を用いて、Jacobi 多様体の加法公式を明示的に与え、Jacobi 多様体の形式群を構成した。

応用として、Brumer の  $GL_2$ -type の Jacobi 多様体のゼータ関数が具体的に計算できる。

本研究は整数論サマースクール (2007) 等で講演、報告集にて発表を行った。

### (4) 虚数乗法を持つ $\mathbb{Q}$ 曲線の形式群

$\mathbb{Q}$  上定義された楕円曲線から定義される 2 つの形式群：極小モデルの形式群、 $L$  関数の形式群、はともに  $\mathbb{Z}$  上定義され、 $\mathbb{Z}$  上強同型

であることが、Honda により示されている。この結果は、Deninger-Nart により  $GL_2$ -type の Abel 多様体に対し、講演者により  $\mathbb{Q}$  の Abel 拡大体上で定義された  $\mathbb{Q}$  曲線や、ビルディングブロックについて一般化されている。

本研究では、Nakamura により分類された虚数乗法を持つ  $\mathbb{Q}$  曲線に対し、Honda の結果を一般化した。 $\mathbb{Q}$  曲線の定義体が  $\mathbb{Q}$  の Abel 拡大とは限らない点がこれまでの一般化と異なる。

本研究は CNTA X (2008) 等で講演。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

Fumio Sairaiji-Takuya Yamauchi,

On rational torsion points of central  $\mathbb{Q}$ -curves,  
Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux,  
20 (2008), 465-483

[学会発表] (計 7 件)

[海外]

① Fumio Sairaiji, Formal groups of building blocks completely defined over finite abelian extensions of  $\mathbb{Q}$ , Journees Arithmetiques Edinburgh 2007, July 5, 2007, University of Edinburgh, Scotland

② Fumio Sairaiji, Formal groups of  $\mathbb{Q}$ -curves with complex multiplication, Canadian Number Theory Association X Meeting, July 17, 2008, University of Waterloo, Canada

[国内]

① 西来路文朗・山内卓也, On rational torsion points of central  $\mathbb{Q}$ -curves, 第 2 回室蘭数論研究集会, 2006 年 10 月 28 日.

② 西来路文朗, 超楕円曲線のヤコビ多様体の形式群, 早稲田大学整数論研究集会, 2007 年 3 月 12 日

③ 西来路文朗, 超楕円曲線のヤコビ多様体の形式群, 第 15 回整数論サマースクール, 2007 年 8 月 23 日

④ 西来路文朗, 虚数乗法を持つ  $\mathbb{Q}$ -曲線の形式群, 中村哲男先生退職記念シンポジウム, 2008 年 1 月 16 日

⑤ 西来路文朗・山内卓也, ヤコビ多様体に対する Frey-Jarden 予想について, 研究集会 ガロア理論とその周辺 徳島 2008, 2008 年 9 月 12 日

[その他]

ホームページ

ReaD 研究開発総合ゼレクトリ

<http://jglobal.jst.go.jp/detail.php?JGL>

OBAL\_ID=200901083084431576&t=1&d=1&q=50  
00019680  
個人ホームページ  
<http://www.kure.hirokoku-u.ac.jp/int/sairaiji/reserch.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

西来路 文朗 (SAIRAIJI FUMIO)  
広島国際大学・工学部・准教授  
研究者番号：40352025

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし