様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　６月１０日現在

研究種目：若手研究(B)
研究期間：2006〜2008
課題番号：18740026
研究課題名（和文）　射影図による２次元結び目の研究

研究課題名（英文）　Diagrammatic surface-knot theory

研究代表者　佐藤　進（SATOH SHIN）
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90345009

研究成果の概要：４次元空間内の曲面（曲面結び目）がどれ程複雑に絡まっているかを定量的に表す指標である、シート数および三重点数に関して、カンドル彩色やカンドル不変量との関係を明らかにした。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,500,000	0	1,500,000
2007 年度	1,000,000	0	1,000,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,500,000	300,000	3,800,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：曲面結び目、射影図、３重点数、シート数、ブレイド指数、カンドル

１．研究開始当初の背景

古典的結び目理論と比較して、曲面結び目理論に関する研究は数が多くなく、基本的事項に関しても未知な部分が多かった。特に、４次元空間内で曲面結び目がどれほど絡まっているかを測る指標である不変量のうち、３重点数、シート数、ブレイド指数に関して、ほとんど具体的な決定に至っていなかった。

２．研究の目的

（１）シート数に関して、カンドル彩色との関係を明らかにし、下からおよび上からの評価を与える。

（２）ブレイド指数に関して、チャート表示と動画法との関係をあきらかにし、連結和のブレイド指数に関する不等式を与える。

（３）カンドル不変量が非自明であるという条件の下で、３重点数が４である球面結び目の特徴付けを与える。

（４）射影平面結び目の３重点数に関して、３重点数が２であるものの特徴付けを与える。また樹下予想との関連に関して考察する。

（５）５彩色に関して、１次元結び目の場合と曲面結び目の場合に、ことなる現象が起こることを明らかにする。

３．研究の方法

（１）曲面結び目の射影図に対して、カンドルを用いた彩色を利用して、曲面結び目のシート数の下からの評価を与える。
　また、１次元結び目のタングルの射影図から、そのスパン結び目の射影図を構成することにより、スパン結び目のシート数の上からの評価を与える。

（２）２次元ブレイドのチャート表示と、曲面結び目の動画法による表示を図を描いて調べることで、曲面結び目の連結和のブレイド指数に関して調べる。

（３）３次二面体カンドルの３次ホモロジー群の生成元を、コンピュータを用いてリストアップし、その結果から、曲面結び目の射影図を逆構成することにより、カンドルコサイクル不変量が非自明であるような曲面結び目の特徴付けを行う。

（４）射影平面結び目の射影図の自己交差集合の逆像を、射影平面上のカーブとみなして、その性質を調べることにより、射影平面結び目で３重点を２個もつものの特徴付けを行う。

（５）５彩色された１次元結び目の射影図を、５彩色を保つライデマイスター変形を利用して、そこに現れる色の個数が減らせるかどうかを調べる。
　また、５次二面体カンドルに関するカンドルコサイクル不変量を利用して、３重点の周辺に現れる色の個数を調べる。
　さらに、リボン球面結び目の仮想弧表現を利用して、５彩色を保つローズマン変形で射影図に現れる色の個数が減らせるかどうかを調べる。

４．研究成果

（１）曲面結び目のシート数の決定に関して、カンドル彩色が非常に有効な道具であることが分かった。具体的には、つぎの結果を得た：

a. 非自明な基本カンドルをもつ球面結び目のシート数は４以上である。
b. 非自明な５彩色をもつ球面結び目のシート数は５以上である。
c. 非自明な７彩色をもつ球面結び目のシート数は６以上である。

　また、１次元結び目 K に付随するスパン結び目のシート数は、高々c(K)+1 であることが分かる（ここで c(K)は K の交点数)。したがって上記の系として、K が３−１結び目、４−１結び目、および５−２結び目の場合、そのスパン結び目のシート数がそれぞれ４、５、６であることが示せた。

（２）過去の私の研究により､曲面結び目 K、L がともに自明な球面結び目でないときには、その連結和 K＃L に関して、不等式

Braid(K#L)<Braid(K)+Braid(L)-1

が成り立つことを示した。その証明は射影図を元にしたやや複雑なものであり、本研究において、その証明を動画法を利用して再検討してみたところ、上の不等式に簡明な説明をつけることができ、さらにその応用として、

Braid(K#L)<Braid(K)+Braid(L)-2

をみたすような曲面結び目 K、L の組を発見することができた。
　このような現象は１次元結び目では起こらないことが知られており、曲面結び目特有の性質である。

（３）過去の私の研究により、３重点数が１、２、３である球面結び目は存在しないこと、および２ツイストスパン３−１結び目は３重点数４をもつことが分かっている。
　本研究では、カンドルのホモロジーサイクルをコンピュータを用いて計算し、得られた結果から射影図を再構成することにより、次の結果を得た：

K を３彩色コサイクル不変量が非自明であるような球面結び目とするとき、次は同値。
a. K の３重点数が４である。
b. K は２ツイストスパン３−１結び目（またはその向きを逆転した球面結び目）とリボン同境である。

一般に、与えられた自然数 n に対して、３重点数が n であるような球面結び目は有限個とは限らない。本結果は３重点数が n である球面結び目全体を、リボン同境で割ることにより、有限に落ちる可能性を示している。これは曲面結び目のテーブル作成におけるひとつの方向性を示唆している。

（４）過去の私の研究により、一般に（球面結び目に限定せずに）すべての曲面結び目、絡み目の３重点数は１ではないことが分かっている。そこで３重点数２の曲面結び目を特徴付けることは、曲面結び目理論における基本課題のひとつとなる。
　本研究では、射影平面結び目の場合に、３

重点数が２であるものが存在するかどうかを調べ、次の結果を得た：

射影平面結び目の３重点数は２ではない。

その応用として、すべての射影平面結び目は、自明な射影平面結び目Ｐと、適当な球面結び目Ｓの連結和Ｐ＃Ｓの形で表されるだろう、という樹下予想に関して、３重点を２個もつような射影図で表される射影平面結び目に対しては、この予想が正しいことが示された。

（５）（１）の結果から、非自明な球面結び目のシート数は４以上ではないか、という予想がたつ。この問題に関して、射影図の自己交差集合の逆像が作るグラフを球面上でよく調べることにより、次の結果を得た：

非自明な球面結び目のシート数は常に４以上である。

この結果はちょうど、１次元結び目理論における、非自明な１次元結び目の交点数は３以上である、という有名な事実と対応づけられる。また、（１）ａの結果をさらに拡張したものとなっている。

シート数４の球面結び目はこの段階で、

a. スパン３－１結び目

b. ２ツイストスパン３－１結び目

の二つであった。本研究ではさらによく調べることにより、スパン３－１結び目と「対をなすような」球面結び目で、シート数４をもち、上の２つのものとは異なるものを見つけることができた。

シート数が４である球面結び目がこの３種類に限られるかどうかは、今後の大きな研究課題である。

また、この研究で得られた手法を応用することにより、シート数が５、６である球面結び目でスパン４－１、スパン５－２とは異なるものを新しく見つけることができた。

（６）１次元結び目の射影図が非自明に３彩色されているとき、その弧には３色がすべて用いられている。一方、５彩色の場合には、必ずしも５色すべてが使われているとは限らない。実際、４－１結び目の標準的な射影図では４本の弧にそれぞれ異なる４色が用いられている。

本研究ではまず次の結果を得た：

a. 任意の５彩色可能な１次元結び目を非自明に５彩色するとき、少なくとも４色が必要である。

b. 任意の５彩色可能な１次元結び目は、ちょうど４色で塗られる射影図をもつ。

次に曲面結び目に関して同様の考察を行うと、１次元の場合とは異なる現象が起こりえることが分かった。

c. ある５彩色可能な曲面結び目で、その任意の射影図を非自明に５彩色するとき、必ず５色すべて必要となるようなものが存在する。

例えば２ツイストスパン４－１結び目がその例になっている。この結果は、カンドルコサイクル不変量の応用として出る。この不変量はリボン曲面結び目に関しては消滅してしまうので、その場合にはｃが成り立たない可能性がある。実際、次が成り立つことが分かった：

d. 任意の５彩色可能なリボン球面結び目は、ちょうど４色で塗られる射影図をもつ。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

1. S. Satoh; Triviality of a 2-knot with one or two sheets, Kyushu J. Math., 63 (2009) 掲載決定. 査読有り

2. S. Satoh; Sheet number and quandle-colored 2-knot, J. Math. Soc. Japan, 2 (2009) p. 579--606. 査読有り

3. S. Satoh; A note on the shadow cocycle invariant of a knot with a base point, 16 (2007) p. 959--967. 査読有り

4. C. J. Scott, M. Saito, and S. Satoh; Ribbon concordance of surface-knots via quandle cocycle invariants, J. Aust. Math. Soc., 80 (2006) p. 131--147. 査読有り

5. C. J. Scott, M. Saito, and S. Satoh, Ribbon-moves for 2-knots with 1-handles attached and Khovanov-Jacobsson numbers, Proc. Amer. Math. Soc., 134 (2006) p. 2779--2783. 査読有り

〔学会発表〕（計４件）

1. 佐藤進；非自明２次元結び目のシート数は４以上，日本数学会年会，2009. 3.28. 東京大学.

2. 佐藤進；５彩色可能な結び目の４色で塗られる射影図，日本数学会秋季総合分科会，2008.9.24~27. 東京工業大学

3. 佐藤進；非自明な基本カンドルをもつ２次元結び目のシート数，日本数学会年会，2008. 3. 22~26. 埼玉大学.

4. 佐藤進；二次元リボン絡み目の単純射影図について，日本数学会秋季総合分科会，2006. 9. 19~22. 大阪市立大学.

６．研究組織

(1)研究代表者

佐藤　進（SATOH SHIN）

神戸大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：90345009

(2)研究分担者

(3)連携研究者