

研究種目：若手研究（B）  
 研究期間：2006～2008  
 課題番号：18740029  
 研究課題名（和文） 3次元多様体の例外的手術についての特異点論的考察  
 研究課題名（英文） Study of exceptional surgeries on 3-manifolds  
 from the singularity theory  
 研究代表者  
 山田 裕一（YAMADA YUICHI）  
 電気通信大学・電気通信学部・准教授  
 研究者番号：30303019

## 研究成果の概要：

3次元球面内の結び目に沿うデーン手術(Dehn surgery)でレンズ空間が生じる“例外的”な現象は「レンズ手術」と呼ばれ、低次元多様体論の研究課題となっている。本研究では「いくつかのレンズ手術は特異点論に由来した divide knot であり、対応する平面曲線は『L型』の領域に沿って斜めの格子を切り取った形状をしている」という現象とその関連話題に取り組み、論文や講演で報告した。

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,300,000	0	1,300,000
2007年度	1,200,000	0	1,200,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,600,000	330,000	3,930,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・幾何学

キーワード： 位相幾何，特異点，

3次元多様体，デーン手術，4次元多様体，結び目，特異点論，枠付き絡み目

## 1. 研究開始当初の背景

筆者は学生時代から、低次元（つまり3・4次元）のトポロジー、特に手術（surgery）による多様体の変化の研究を続けている。この分野では、結び目（knot）の現象とその多様性が中心的な役割を果たすが、その一部については、代数曲線・特異点論などの現代的な進展と関連付けることで理解が深まると考えている。

その全体構想の中で、筆者は「例外的手術（exceptional surgery）」に注目した。これは、結び目が双曲的であってもデーン手術に

よって双曲的でない3次元多様体が生じ得る（いわば、奇妙な）現象の総称である。1980年に R. Fintushel-R. Stern によって最初の例が発見されて以来、いろいろな方法で研究が展開され、現在では低次元トポロジーの一分野となっている。そこに代数曲線の特異点論の視点を盛り込み、“例外性”に潜む規則性を解明することが筆者の研究である。

例外的手術の中でも、特にレンズ空間が生じる場合を「レンズ手術」という。筆者は2003年頃、既知のレンズ手術のいくつか、特異点論の研究の中で N. A'Campo 氏によって定

義された divide knot の範疇に属すことを確認し（図を参照）、そこに意外な規則性を発見した。さらに、研究者間の情報交換によって、この研究課題が 組み紐 (Braid) の力学系や代数的整数の理論とも関連した、広がりのある課題であることに気がついた。また、当時は微分幾何・数理物理から生まれて急発展した理論「結び目フレアーホモロジー」は登場したばかりだった。

## 2. 研究の目的

低次元多様体論として発展した「例外的手術」の分野に代数曲線の特異点論、つまり複素 2 次元・実 4 次元の多様体論の視点を盛り込み“例外性”に潜む規則性を解明するのが筆者の研究目的である。

研究期間の前半では、最初に発見した具体例に関する規則性をもとに、レンズ手術全体の系統的な考察を展開することと、レンズ手術以外の例外的手術（ザイフェルト多様体、グラフ多様体を生じる手術など）にも考察を深めていくことを目的とした。

後半では、その応用として、未知の 4 次元多様体の構成、特にエキゾチック組の構成との関連に興味を持った。エキゾチックな 4 次元多様体の構成に使われる「有理ブローダウン (Blow-down)」はレンズ空間に沿う多様体の切り貼りであるが、これが特別な場合のレンズ手術に関係していることを発見し、これについても研究を展開した。

## 3. 研究の方法

数学では、論文による成果報告と同様に、研究集会・勉強会での講演による成果発表が重要であるが、研究集会への参加（研究者間の情報交換）が大切な研究活動である。

### (1) 本研究期間中に、4 件の国際研究集会

（うち 3 件は海外）に参加した。特に、筆者の研究分野の“巨匠” R. Kirby 教授の 70 歳を記念した研究集会（2008 年 8 月，米国 Berkeley）では、筆者の研究分野の何人もの著名な研究者に自分のアイデアを紹介することができた。また、若手のレンズ手術の専門家から、直接結果に結びつく貴重な指摘を受けることができた。また日本・韓国・中国と交代で開催している「第 4 回 East Asian School of knots」（2008 年 1 月，東大数理）では、現地世話人を務めた。

### (2) 2007 年度には、主催者の 1 人として「キャッソンハンドル勉強会」（5 月）と「低次元幾何学と無限次元幾何学」（9 月）を開催した。キャッソンハンドルは、4 次元多様体論において最大の不可解現象である エキゾチック

性の核心にある対象といえる。ポアンカレ予想（3 次元）が解決された今、可微分 4 次元ポアンカレ予想にも関心が高まると予想される。キャッソンハンドルの理解には非可微分同相性と 同相性 を両立して理解することが必要だが、後者については不十分だったと考えている。これについては、続編を企画し努力中である。

(3) 毎年夏に開かれる恒例のトポロジーシンポジウム、関西と東京で開かれる結び目論と低次元多様体論の研究集会、広島大で開催されている 4 次元多様体論の研究集会などに参加して最先端の情報を交換した。

(4) 研究集会以外にも、機会のあるごとに日程等を工夫して研究者を訪問し／招き、情報交換と打合せを行った。共同研究を行った門上晃久氏、丹下基生氏 など。

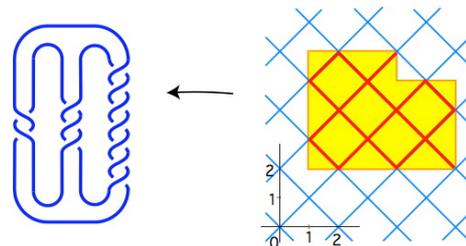
(5) ノート型計算機、ソフトウェアなどを購入し情報環境を改善した。出張先でも有効な情報交換や議論が可能となった。

昨今、純粋数学である幾何の分野でも、結び目や多様体の不変量が複雑（例えば、複雑な集合の上での組合せ的な総和など）で、具体例に対する計算は計算機・プログラムに頼るものが多い。レンズ手術に登場する結び目は概して複雑であり、計算機・ソフトが欠かせない。

幾何の分野では、ソフトウェアを用いて正確でわかりやすい図を描くことは、読者や聴衆の理解を大いに助ける。便利な機能のある描画ソフトを利用したところ、効果は大きかった。

研究者によって作成され公開されている研究用プログラムには、Linux 専用、Windows 専用のものがあり、Macintosh ユーザの筆者は使用できなかった。このような障害が若干解決できた。

計算機自体を維持管理するためのソフトウェアなども定期的に更新して、良い IT 環境に保ち、研究の本質的な部分に集中することができた。



図： プレッツェル結び目  $P(-2, 3, 7)$  [左] とその divide knot 表示 [右]。  
黄色の領域 (L 型) の面積 18 が  $P(-2, 3, 7)$  のレンズ手術係数に一致する。

#### 4. 研究成果

##### (1) 2006年度(1年目 初年度)

① TypeI から TypeVI と呼ばれる一般的なレンズ手術については筆者の当初の予想が正しいことを証明する論文を執筆した(図を参照)。既に電子版が出版されている。TypeIX以降が気になったことと、細部に不安があったため、大半が完成してから仕上げるまでに長い時間がかかった。この成果は9月の学会(大阪市立大), 11月の箱根勉強会で講演した。8月のスペイン(国際数学会議のサテライト)集会でも簡単に報告した。

② レンズ手術をもつ結び目のアレキサンダー多項式の性質について、門上晃久氏(大阪市立大:当時)との共著論文を2件執筆した。2件とも既に出版されている。当時は1成分に限定して研究していたが、現在(2009年4月)続編にあたる研究「2成分で一方が自明な場合」を共著論文として再び執筆中である(③④)。この課題は2008年度の「有理ブローダウン」の話題(②③)にも深く関係している。

③ 「L型 divide knot」の範疇に属す結び目に関して、アレキサンダー多項式を求める組合せ的なアルゴリズムがある。この方法で行った多くの計算実験が、上記②の背景にあった。これについて11月の集会「トポロジーとコンピュータ2006」で講演した。

##### (2) 2007年度(2年目)

① 最新の研究成果の交流を目的として、世話人として国内の研究集会を年内に2つ開催した。みずから Kirby図式などの解説を含む3講演を行った。キャッソンハンドル・ゲージ理論など広範囲の4次元多様体論を対象にしたものなので、今後の発展が期待できる。現在(2009年4月)続編の開催を検討中である。

② 日程の都合で2007年度は海外の集会には参加できなかったが、国内で開催された「第4回 East Asian School of knots」の現地世話人を務め、海外の研究者の記憶に残る国際的な活動はできたと思っている。

③ 4次元多様体論で近年盛んに議論されている「有理ブローダウン」はレンズ空間に沿う切貼りであるが、6月に専門家 J. Park 教授(韓国)の集中講義を聞き、筆者の研究との関係に気がついて、早速それを指摘する論文を執筆し Arxiv に投稿した。そこで述べたレンズ空間の“意外な”構成法は、12月には早速デーモン手術に関する研究(市原-斎藤)で引用された。位相不変量の研究としても興味がある。広島大の2月の集会で、それも含

めた最新情報を報告した。論文としては、その後の進展を含めた校正が必要である。

④ 首都大学東京で集中講義の機会をいただき、「平面曲線と3次元多様体の手術」の題目で本研究の基礎部分を講義した。

##### (3) 2008年度(3年目 最終年度)

① より一般的なレンズ手術のL型曲線による divide 表示の論文(上記(1)の①)が、数回の推敲の末に電子版の掲載に至った。

② 森元勘治氏(甲南大)との共著論文が掲載内定に至った。Twisted torus knots は divide 表示の利点が活かせる族であるが、研究を開始した当初の目的から考えると意外な応用と言える。

③ 異なる torus knot が同じレンズ空間を生む手術の組に関して丹下基生氏(京大数理研)との共著論文を執筆した。1つ予想を書き加えたいが、それにはもう少し検討を要する。

④ ある2成分絡み目のレンズ手術の可能性について門上晃久氏(大連理工大)と共同研究を開始した。この研究は上記(1)②の続編に相当する。

⑤ 夏の米国出張で若手研究者 K. Baker 氏から上記①では扱うことのできなかったレンズ手術に関してヒントを得た。それにより、divide 表示が最も困難と思われた TypeVIII レンズ手術についての研究が進んだ:見込みとして、それらも divide knot ではあるが対応する曲線はL型ではないようである。この内容は9月の数学会(東工大)で概要を説明した他、2月「第5回 East Asian School of knots」(韓国,慶州)と3月「Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics」(広島大)で講演した。

⑥ 2008年度は、上記の米国・韓国の集会を全日程参加するため、勉強会や計算機の購入は見合わせることにした。

##### (4) 全年度を通して

研究会に参加して、選りすぐられた講演を聞くことに加え、集まった研究者の間で情報交換することが、研究の発展のために重要であることをあらためて感じた。上記(1)②, (3)②, (3)⑤などは、そうした活動の成果である。

各地の研究集会等で、なるべく多くの研究者に「L型 divide knot」の効用を個人的に

紹介した。そのうちのいくつかは新たな展開が始まっている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

1. Yuichi YAMADA, 査読 有  
Lens space surgeries as A'Campo's divide knots,  
Algebraic & Geometric Topology 9  
(2009), 397-428. 電子版
2. K.MORIMOTO and Y.YAMADA, 査読 有  
A note on essential tori in the exterior of torus knots with twists,  
KOBÉ Journal of Mathematics 掲載内定.
3. 山田 裕一, 査読なし  
Generalized rational blow-down,  
torus knots, and Euclidean Algorithm,  
2008年度 日本数学会 秋季総合分科会  
トポロジー分科会 アブストラクト  
(2008), 50-51.
4. T.KADOKAMI and Y.YAMADA, 査読 有  
A deformation of the Alexander  
polynomials of knots  
yielding Lens spaces,  
Bulletin of Australian Mathematics  
Society 75 (2007), 75-89.
5. Yuichi YAMADA, 査読 有  
Finite Dehn surgery along A'Campo's  
divide knots,  
Advanced Studies in Pure Mathematics 43  
(2006), 573-583.
6. 山田 裕一, 査読なし  
Berge's lens surgeries as  
A'Campo's divide knots,  
2006年度 日本数学会 秋季総合分科会  
トポロジー分科会 アブストラクト  
(2006), 83-84.
7. 山田 裕一, 査読なし  
Lens space surgeries and plane curves,  
研究集会「結び目のトポロジー-VIII」  
報告集 (2006), 51-64.
8. T.KADOKAMI and Y.YAMADA, 査読 有  
Reidemeister Torsion and Lens surgeries  
on  $(-2, m, n)$ -Pretzel knots,  
KOBÉ Journal of Mathematics 23・1-2

(2006), 65-78.

[学会発表] (計 10 件)

1. Yuichi YAMADA,  
Dehn surgery along A'Campo's divide  
knots, Lens spaces and plane curves,  
研究集会 Branched Coverings,  
Degenerations, and Related Topics,  
広島大学, 2009年3月9日.
2. Yuichi YAMADA,  
Lens space surgery along  
A'Campo's divide knots II,  
The 5th East Asian School of Knots  
and Related Topics,  
慶州教育文化会館 (慶州, 韓国),  
2009年1月12日.
3. 山田 裕一,  
Generalized rational blow-down,  
torus knots, and Euclidean Algorithm,  
日本数学会 秋季総合分科会,  
東京工業大学, 2008年9月25日.
4. Yuichi YAMADA,  
Torus knots, generalized rational  
blow-down, and lens space surgery  
of Type 7, 8,  
研究集会「4次元のトポロジー」,  
広島大学, 2008年2月7日.
5. 山田 裕一,  
Kirby Calc. 入門 (解説)  
研究集会  
「低次元幾何学 と 無限次元幾何学」,  
東京大学玉原国際セミナーハウス,  
2007年9月11日.
6. 山田 裕一,  
Generalized rational blow-down and  
Euclidean Algorithm,  
上記 5. に同じ, 2007年9月12日.
7. 山田 裕一,  
多様体の中で具体的に  
キャッソンハンドルを“作る”,  
「キャッソンハンドル勉強会」,  
東京大学玉原国際セミナーハウス,  
2007年5月27日.
8. Yuichi YAMADA,  
(部分的に 門上晃久氏との共同研究)  
Alexander polynomials of knots repre-  
sented by L-shaped plane curves,

研究集会

「トポロジーとコンピュータ2006」,  
大阪産業大学梅田サテライト,  
2006年11月28日.

9. 山田 裕一,  
L型平面曲線, Blow-down と  
Dehn surgery I, II,  
Workshop「不変量を用いない結び目理論」,  
箱根高原ホテル, 2006年11月5日.
10. 山田 裕一,  
Berge's lens surgeries as A'Campo's  
divide knots,  
日本数学会 秋季総合分科会,  
大阪市立大学, 2006年9月21日.

[図書] (計0件)

ただし、岩波書店「数学辞典 第4版」  
日本数学会 (編集) (2007) において  
位相幾何学分野 校正委員と索引委員  
を兼任しました。

[産業財産権] ありません。

[その他]

ホームページ等

[http://matha.e-one.uec.ac.jp/~yyyamada/  
index.html](http://matha.e-one.uec.ac.jp/~yyyamada/index.html)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山田 裕一 (YAMADA YUICHI)  
電気通信大学・電気通信学部・准教授  
研究者番号: 30303019

以上