様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年５月２９日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：１８７４００３４
研究課題名（和文）　部分多様体の外在的な性質と内在的な性質の関係

研究課題名（英文）　The relation between an intrinsic property and an extrinsic property of a submanifold

研究代表者
安藤　直也（ANDO NAOYA）
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：５０３５９９６５

研究成果の概要：
私は数年前，第一基本形式と曲率線（接線が主方向である曲線)が E^3 の曲面の主曲率をほとんど決定することを示した．上記研究期間内においては，3 次元空間型の曲面の曲率線の測地的曲率の観点で幾つかの種類の曲面の特徴付けを行なった．また主曲率を解とする優決定系を調べ，第一基本形式と曲率線が曲面の主曲率をどの程度決定するのかについて幾つかの結果を得た．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	1,300,000	0	1,300,000
２００７年度	1,200,000	0	1,200,000
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	240,000	3,540,000

研究分野：数学
科研費の分科・細目：幾何学
キーワード：主分布，曲率線，測地的曲率，molding surface，優決定系，整合条件，Liouville の方程式，sinh-Gordon 方程式

１．研究開始当初の背景
曲面の第一基本形式と第二基本形式は，Gauss の方程式と Codazzi-Mainardi の方程式によって関係づけられている．そしてこれらの方程式による第一基本形式と第二基本形式の関係が曲面を決定する（曲面論の基本定理)．私は数年前，第一基本形式と主分布が曲面の主曲率をほとんど決定することを示した．また以前私が調べた主方向平行曲面で臍点を持たずかつ Gauss 曲率が零ではないものは，Codazzi-Mainardi 多項式が恒等的に零でありかつ曲率線の族の一つが測地線からなる曲面として特徴づけられること

がわかった．さらに曲率線の族の一つが測地線からなる曲面を，主分布と相性がよい局所座標による第一基本形式の局所表現の観点で特徴づけた．

２．研究の目的

研究の大まかな目的は曲面の内在的な性質と外在的な性質の関係を調べることである．より具体的には，主分布と第一基本形式の関係を調べることである．そして様々な曲面について，主分布と第一基本形式の関係の観点で特徴づけることである．

３．研究の方法

まず曲率線の測地的曲率に注目した．測地的曲率を用いて，主分布と第一基本形式の関係を論じようと考えた．その後，主曲率を解とする優決定系に注目し，一度曲面との関係を忘れてある種の優決定系の解の存在や一意性などを調べ，ここで得た結果を用いて曲面が第一基本形式と主分布によってどの程度決まるのかを調べた．

４．研究成果

(1) 曲面の曲率線の測地的曲率に関して得た結果を説明したい．

① 3 次元空間型の曲面で臍点を持たないものを考える．曲面論の基本方程式である Gauss の方程式および Codazzi-Mainardi の方程式を，曲面上の標準的前発散と曲面の主曲率の間の関係式として記述した，但し標準的前発散とは曲面の各点を通る二つの曲率線の測地的曲率ベクトルの和で定義されるベクトル場で，この発散は内在的曲率 K に等しい．主曲率が零にならない点の近傍上で，Codazzi-Mainardi 多項式を曲率線の測地的曲率，曲面の内在的曲率および空間型の (一定)断面曲率を用いて表した．

② 3 次元空間型の臍点を持たない平均曲率一定曲面を曲率線の測地的曲率の観点で特徴づけた．この特徴づけの書き換えを幾つかのやり方で行なうことができる．書き換えの一つ目は上述の標準的前発散のポテンシャルに関するものである．二つ目は主分布を局所的に表すベクトル場として湧き出し無しかつ渦無しのものを見出せるというものである．三つ目は主分布と相性が良い局所座標に関するものである．

③ Lawson によって調べられた「一般化された Ricci 条件」を幾通りかに書き換えることができる．計量 g が一般化された Ricci 条件を満たすとは，$C = (H_0^2 - K + L_0)^{1/4}$ (但し H_0 や L_0 は $H_0^2 - K + L_0 > 0$ を満たす定数で，K は g の曲率である)に対し g と共形的な計量 $C^2 g$ が平坦であるときにいう．一般化された Ricci 条件の書き換えの一つ目は曲率 K を log C の Laplacian による像として表すというものである．二つ目は計量 g と共形的な計量 $C^2 g$ に関して湧き出し無しかつ渦無しの単位ベクトル場を局所的に見出すことができるというものである．三つ目は計量 $C^2 g$ に関して互いに直交する二つの単位ベクトル場でそれらの積分曲線が測地線であるようなものが存在するというものである．定義も含めて以上に現れた四つの同値な条件の各々を，②で述べた平均曲率一定曲面の特徴づけのいずれかから導くことができる．以上に注意して，一般化された Ricci 条件を満たす計量を持つ 2 次元 Riemann 多様体 M が，L_0 を断面曲率とする 3 次元空間型において H_0 を平均曲率とする曲面となるように主分布を与える方法を示した．特に，M の 1 点での接平面の互いに直交する二つの 1 次元部分空間が主分布を決定することがわかった．さらに $H_0 = 0$ の場合には，これらの情報によって曲面の空間における形状が決定されることがわかった．

④ 3 次元空間型の臍点を持たない定曲率曲面を曲率線の測地的曲率の観点で特徴づけた．特に空間型の一定断面曲率と曲面の一定曲率が等しい場合，主分布の一つの積分曲線は全て測地線である (曲率線の族の一つが測地線からなる)．また空間の断面曲率と異なる一定曲率を持つ曲面で Codazzi-Mainardi 多項式が零ではないものに対し，二つの主曲率の対は符号を除いて第一基本形式と主分布によって一意に定まることがわかった．また Codazzi-Mainardi 多項式が恒等的に零であるような定曲率曲面が存在することがわかった．

(2) 「Molding surface の曲率線の族の一つは測地線からなる」ことに関連してわかった事柄を説明したい．

① E^3 の曲面で臍点を持たず Gauss 曲率が零ではないものが molding であるとは，合同ではないが主分布を保つ等長

写像で移り合う曲面の（実数によりパラメーター付けされた）族に含まれるときにいう．曲面がmoldingであることとその Codazzi-Mainardi 多項式が恒等的に零であることは同値である．molding である曲面の曲率線の族の一つは測地線からなることが既に知られている(Cartan, Bryant-Chern-Griffiths)．私は $F_u=\alpha+\beta e^F$, $F_v=\gamma+\delta e^{-F}$という型の優決定系を考察することにより，この命題の別証明を与えた．Gauss の方程式と Codazzi-Mainardi の方程式を，主分布と相性が良い局所座標の観点で表し，これらの方程式から主曲率の一つを消去するともう一つの主曲率の対数が上の型の優決定系の解であることがわかる．Codazzi-Mainardi 多項式が恒等的に零であることは優決定系が整合条件 (compatibility condition)を満たすことと同値である．上の命題の別証明を与えるために，優決定系に現れる二つの関数β，δのいずれか一方が恒等的に零であることと曲率線の族の一つが測地線からなることが同値であることに着目した．βδが零ではないと仮定して矛盾を導くことを試みた．βδ≠0とするので（一般性を失うことなく）βδ＜0を仮定できるが，このとき $\psi=\log|2\beta\delta|$は Liouville の方程式 $\psi_{uv}=e^{\psi}$ の解であることが整合条件からわかる．一般に，曲面とは無関係に上述の型の優決定系について議論するときにはこのこと自体おかしなことではないが，上のやり方で曲面上に見出された優決定系が整合条件を満たす場合には矛盾が生じることがわかった．

② (2)の①に現れた命題を用いると，主方向平行曲面はmoldingである曲面とほとんど同種のものであることがわかる．E^3の曲面Sが主方向平行 (parallel curved)であるとは，ある平面 P が存在してSの各点での主方向の一つがPに平行であるときにいう．以前に私は，臍点を持たずかつGauss曲率が零ではない E^3 の曲面に対し，各点の近傍として標準的な (canonical)主方向平行曲面をとることができることと，曲率線の族の一つが測地線からなりかつ Codazzi-Mainardi 多項式が恒等的に零であることは同値であることを示していた．主方向平行曲面の定義においては臍点や Gauss 曲率についての仮定を必要としないので，「molding である曲面は主方向平行である」と言うことはできても「主方向平行曲面は molding である」とは厳密には言えない．しかしこれら二つの曲面の種類はほとんど同じものと考えてよいだろう．

③ 上に述べたように，曲面がmolding であることと曲面上に現れる優決定系が整合条件を満たすことは同値である．上述の型の優決定系で整合条件を満たすものの一般解を具体的に記述した．特にβδ≠0の場合には，Liouville の方程式の一般解を用いて優決定系の一般解を記述した．

(3) (2)に現れた優決定系についてさらに調べて得た結果を説明したい．

① 上述の型の優決定系が解を持つための必要十分条件を求めた．与えられた 2 変数関数α，β，γ，δに対し，$a_u=\alpha$，$e^{-b}b_u=\beta e^a$, $c_v=-\gamma$，$e^{-d}d_v=-\delta e^c$ を満たす2変数関数 a, b, c, d が存在する．このような a, b, c, d で $a+b+c+d=0$ を満たすものが存在することが解の存在に対する必要十分条件である．この命題の証明は容易であるが，一方でこの命題は解の存在の判定においてもまた解とα，β，γ，δとの関係を見る上でも便利である．

② 優決定系が整合条件を満たす場合に，(3)の①で述べた必要十分条件に現れる a, b, c, d を具体的に記述した．この記述から(2)の③で得た一般解を再び得ることができる．また(3)の①で述べた必要十分条件を用いて，Liouville の方程式の一般解を求める新しい方法を得た．Liouville の方程式の一般解を求める方法としては，Liouville の方程式の解と線形方程式 $\phi_{uv}=0$ の解を関係づける Bäcklund 変換を用いるものが既に知られている．

③ 上述の優決定系が整合条件を満たさないとき，解が存在するならば解の個数は高々 2 である．このことは，優決定系の解 F に対し $F_{uv}=F_{vu}$ を計算すると，e^F がα，β，γ，δおよびこれらの偏導関数を組み合わせて得られる関数を係数とする 2 次方程式の解であることからわかる．優決定系がちょうど二つの解を持つための必要十分条件を求めた．条件を求める際，γ≡0を仮定しても一般性を失わない (F が上の型の優決定系の解であることと，$G=F+c$ が $G_u=\alpha'+\beta' e^G$, $G_v=\delta' e^{-G}$ の解であることは同値である，但し c は $c_v=-\gamma$を満たし，$\alpha':=\alpha+c_u$, $\beta':=\beta e^{-c}$, $\delta':=\delta e^c$ である)．

優決定系がちょうど二つの解を持つならばまず整合条件は満たされないことがわかり，さらに$\gamma \equiv 0$を仮定するとき幾つかの条件を満たす二つの関数 p，q が存在してα，βおよびδの各々が p，q を用いてある形で記述されることが必要十分条件であることがわかった．そしてちょうど二つの解が存在するならば，二つの解は上に現れた p，q を用いて$\log(p+q)$，$\log(p-q)$と表されることがわかった．

④　また優決定系が整合条件を満たさずかつ$\beta \equiv 0$の場合に解が存在するための条件を求めた．この場合に解が存在するならば解は一意であり，このことは解 F に対し $F_{uv} = F_{vu}$ を計算することによってわかる．そして解 F が存在するならば，$F = \log Q(\alpha, \gamma, \delta)$ が成り立つ，但し $Q(\alpha, \gamma, \delta)$ はα，γ，δおよびこれらの偏導関数を組み合わせて得られる正値関数である．特に，α，γ，δの間の関係式 $(\log Q(\alpha, \gamma, \delta))_u = \alpha$が成り立つ．逆に$\alpha$，$\gamma$，$\delta$がこの関係式を満たすとき，1 変数 v にのみ依存する関数 $g(v)$ が一意に存在して，γの代わりに$\gamma + g(v)$ を用いて得られる優決定系 $F_u = \alpha$, $F_v = (\gamma + g(v)) + \delta e^{-F}$が解を持つことがわかった．優決定系が曲面上に現れている場合には，$\beta \equiv 0$という条件は曲率線の族の一つが測地線からなることと同値である．

⑤　曲率が実数 L_0 とは常に異なる 2 次元 Riemann 多様体 M 上に，各点で互いに直交する二つの 1 次元分布 D_1，D_2 が与えられているとする．このとき，M の各点の近傍から断面曲率が L_0 である 3 次元空間型への等長なはめこみで D_1，D_2 が主分布を与えるようなものが存在するための必要十分条件を得た．この条件は(3)の①で求めた条件を用いて得ることができ，g，D_1，D_2の間の関係を与えるものである．

⑥　以下 $L_0 = 0$ とし，M の各点の近傍を⑤におけるようにはめこむことができるとする．もし M 上に現れる優決定系が整合条件を満たすならば，E^3 に現れる曲面はちょうど molding surface である．整合条件を満たさない場合，はめこみは一意であるかまたは像が互いに合同ではない二つのはめこみが存在するかのいずれかが起きるが，(3)の③を用いて後者が成り立つための必要十分条件を g，D_1，D_2の間の関係として得た．この条件の中にsinh-Gordon方程式が現れ，この条件が成り立つ場合に曲面が isothermic であることと零ではない一定平均曲率を持つことは同値である．なお，対応する優決定系が整合条件を満たさないとき，3 次元空間型の極小曲面，3 次元空間型の定曲率曲面で主曲率が零ではないもの，E^3 の曲面で Gauss 曲率が零ではなくかつ曲率線の族の一つが測地線からなるものの上に現れる優決定系の解は一意である（従ってこれらの曲面の各々は第一基本形式および主分布によって空間の中での形状が決定されていることがわかる）．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）
① N. Ando, A surface which has a family of geodesics of curvature, Beitraege zur Algebra und Geometrie, 48 (2007), 237-250.
② N, Ando, Semisurfaces and the equations of Codazzi-Mainardi, Tsukuba J. Math., 30 (2006), 1-30.

〔学会発表〕（計 10 件）
① 安藤直也，Molding surfaces and Liouville’s equation，2009 年１月 11 日，研究集会「測地線および関連する諸問題」（熊本大学）．
② 安藤直也，Molding surfaces and Liouville’s equation，2008 年９月 24 日，日本数学会 2008 年度秋季幾何学分科会（東京工業大学）．
③ 安藤直也，Molding surfaces and Liouville’s equation，2008 年８月 31 日，幾何学阿蘇研究集会（休暇村南阿蘇）．
④ 安藤直也，曲面の曲率線の測地的曲率，2007 年８月 24 日，第 54 回幾何学シンポジウム（鹿児島大学）．
⑤ 安藤直也，曲面の曲率線の測地的曲率，2007 年８月３日，熊本大学幾何学セミナー（熊本大学）．
⑥ 安藤直也，曲面の曲率線の測地的曲率について，2007 年３月 27 日，日本数学会 2007 年度年会幾何学分科会（埼玉大学）．
⑦ 安藤直也，曲面の曲率線の測地的曲率，2007 年３月６日，研究集会「幾何構造と部分多様体の交差する領域」（名城大学）．
⑧ 安藤直也，曲面の曲率線の測地的曲率について，2006 年 11 月 29 日，部分多様体論・湯沢２００６（新潟県，湯沢グラン

ドホテル).

⑨ 安藤直也, 曲率線の族の一つが測地線からなる曲面について, 2006 年９月 19 日, 日本数学会 2006 年度秋季幾何学分科会 (大阪市立大学).

⑩ 安藤直也, 曲率線の族の一つが測地線からなる曲面について, 2006 年５月 12 日, 九州大学幾何学セミナー (九州大学).

〔その他〕
ホームページ等

http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~ando/papers.html,
http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~ando/intro-j.html

６．研究組織
(1)研究代表者

安藤　直也　(ANDO NAOYA)
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：50359965