

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2006 年度～2008 年度

課題番号：18740035

研究課題名：曲面からみた結び目の位相的性質の研究

研究課題名：Study of topological properties of knots viewed from surfaces

研究代表者：平澤美可三 (HIRASAWA MIKAMI)

名古屋工業大学大学院工学研究科准教授

研究者番号：00337908

研究成果の概要：

三次元空間内の絡まった輪の事を結び目といい、その集まりを絡み目と呼ぶ。それらは紐を切らずに互いに変形し合えるものは同値とみなす。本研究では結び目の持つ、位相的な性質を研究対象とし、性質を引き出すために結び目や絡み目を境界としてもつ曲面を利用した。その結果、絡み目補空間の構造（ファイバー構造）、組紐としての良い配置、曲面込みでの良い配置、符号数やアレクサンダー多項式などの不変量などに関する成果を上げた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	800,000	0	800,000
2007 年度	600,000	0	600,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
総計	2,000,000	180,000	2,800,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：結び目，絡み目，三次元多様体，不変量，ザイフェルト曲面，ファイバー曲面

1. 研究開始当初の背景

三次元空間内の柔らかい紐からなる結び目の位相的性質を調べる際、その柔軟性を保ちつつ、何らかの形で固定する必要がある。結

び目、絡み目について、それを境界としてもつ曲面を構成することができる。逆に曲面を考え、その境界を結び目として捉えることで結び目の性質がよく見えることがある。本研

究では、曲面を使って結び目の位相的性質をうまく抽出することを考えた。

2. 研究の目的

絡み目の位相的性質として、その補空間の構造が考えられるが、特に補空間に曲面束の構造が入るとき、その結び目をファイバー結び目とよぶ、ファイバー結び目は三次元多様体の研究においても様々な局面で現れる重要なクラスになっている。本研究の目的は、

(1)このような構造の理解を深めること (2)結び目、絡み目を曲面を用いる事でうまく配置に置き、その性質を調べること(3) それらを通じて結び目の不変量を調べる事である。

3. 研究の方法

結び目や絡み目に対し、それを境界としてもつ曲面を張り、結び目の衛星化や組紐化を通じてその振る舞いを調べる。曲面を通じて結び目を幾何学的に調べる一方、代数的な側面から結び目を研究している村杉邦男氏との共同研究を行う。それにより、幾何学サイド、代数サイドの両側から様々な性質を特定する。結び目のクラスとしては、よく研究されている二橋結び目や二橋絡み目に特に注目する。

4. 研究成果

(1) サテライト結び目のファイバー性について：

結び目の補空間が曲面束の構造をもつとき、ファイバー結び目であるという。衛星化によって構成される結び目について、それがファイバー結び目になるかを判定するクライテリアを、D. シルバーと村杉邦男氏との共同研究により二つ開発した。一つは代数的なもので、補空間の基本群から整数へのある写像の核の有限生成性によるものであり、もう一つは幾何的なもので、パターン結び目にさらに二成分を加えた絡み目のファイバー性を

使うものである。これらはブルデ・ツィーシヤンの有名な教科書の初版の誤りを正しており、次版のものより分かりやすく、また使いやすくなっている。論文では更に、自明結び目でさえ衛星化するとファイバーになる場合やならない場合があり、興味深い例の無限列を与えている。

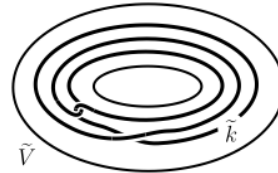


図1：衛星化するとファイバーにならない例

(2) 二橋絡み目の組紐化について：

二橋結び目の組紐指数は村杉氏によって91年に決定されている。本研究では、二橋絡み目を組紐として表すにあたって組数、および(ある生成系に関して)長さを最小にする効率的なアルゴリズムを開発した。そこでは、有理絡み目の最小種数ザイフェルト曲面を変形しながら、組紐の上に自然に配置できることを示している。そのような配置にできるものをベネキン標準形というが、指数4の組紐については、4本組紐上ではベネキン曲面を持たない絡み目の存在は既に示しており、有理絡み目では組紐指数がいくらかでも大きいものが存在することを鑑みると興味深い結果となっている。

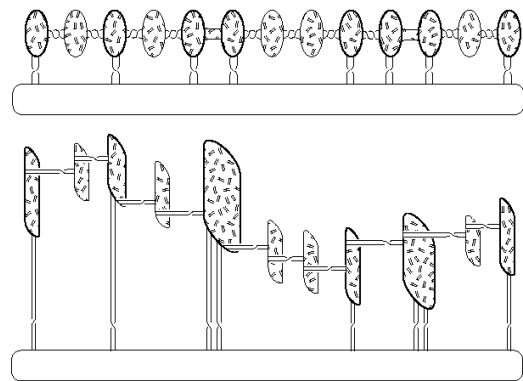


図2：曲面を用いた有理絡み目の組紐化

(3) ザイフェルト曲面の標準形について：
既に小林氏-降旗氏との共同研究によって開発済みのザイフェルト曲面の標準形 (flat plumbing basket) についてレドルフ流の、エスパリエー標準形からの再考察を行いエスパリエーに対応した形で主結果を述べ直した。また、その考察により新たな問題を提起した。

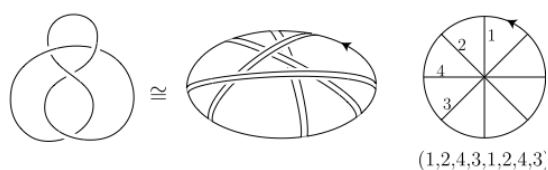


図3: フラットプラミングバスケットの例

(4) 二橋絡み目の不変量について：
二橋結び目、および二橋絡み目について、それを表す図式として、シューベルト図と呼ばれるものがある。符号数やアレクサンダー多項式といった位相的不変量をシューベルト図から読み取ることができることの絡繰りを示した。特に絡み目については、二変数アレクサンダー多項式までも記述する公式を開発した。符号数やアレクサンダー多項式は結び目、絡み目のザイフェルト曲面からも定義、および計算される量であるが、それを絡み目を表す図式から得られるグラフの上に可視化した。符号数はザイフェルト曲面をアニュラスのプラミングで表した時の、捻りの符号の総和となる。シューベルト図の上では曲面は非常に複雑なものとなるが、捻りの総和はシューベルト図から自然に構成されるグラフの端点の高度差によって与えられる。二橋結び目の符号数やアレクサンダー多項式は、より高度な不変量であるフレアーホモロジーを決定するなど、重要な不変量である。

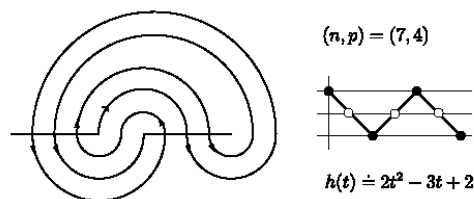


図4: シューベルト図とアレクサンダー多項式

(5) 捻りアレクサンダー多項式について：
結び目の捻りアレクサンダー多項式は、古典的アレクサンダー多項式の拡張になっているが、結び目のファイバー性を反映するなど、ザイフェルト曲面の性質もよく引き継いでいる。しかし古典的アレクサンダー多項式の性質がどの程度反映するのかはよく分かっていない。特に二橋結び目に注目し、トロント大学の村杉氏との共同研究を行った。結果として、捻りアレクサンダー多項式の1、および-1における値の振舞いを記述した。さらに、二橋結び目の補空間の基本群の様々な表現を用いて捻りアレクサンダーの性質を調べた。具体的にはメタサイクリックやメタアーベリアンな表現を用いた。成果としてそのような場合の捻りアレクサンダー多項式について、特別な形に因数分解されることや、他の多項式にある変数を代入した形になっていることなどの性質を見いだして示した。これらの結果は更に一般的な表現をもつ結び目の捻りアレクサンダー多項式に関する予想にもつながり、今後の発展が期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

R.Furihata, M.Hirasawa and T. Kobayashi,

Seifert surfaces in open books, and a new coding algorithm for links.

Bulletin of the London Math. Society
Vol. 40 (2008) 405-414.

[査読有](#)

M. Hirasawa, K. Murasugi and D. Silver,
When does a satellite knot fiber ?

Hiroshima Math. Journal
Vol. 38 (2008) 411-423.

[査読有](#)

M. Hirasawa and K. Murasugi,
Fibred double torus knots which are band-sums of torus knots.

Osaka Journal of Math.
Vol. 44 (2007) 11-70.

[査読有](#)

M. Hirasawa and K. Murasugi,
Genera and firedness of Montesinos knots.

Pacific Journal of Math.
Vol. 225 (2007) 53-83.

[査読有](#)

M. Hirasawa

Obtaining string-minimizing, length-minimizing braid word for 2-bridge links.

Series on Knots and Everything
Vol.40 (2007) 43-50.

[査読有](#)

[学会発表] (計 3 件)

M. Hirasawa

Obtaining string-minimizing, length-minimizing braid word for 2-bridge links.

Intelligence of Low Dimensional Topology
2006 年 7 月 25 日

広島大学

M. Hirasawa

When does a satellite knot fiber ?

The 3rd East Asian School of Knots and Related Topics,

2007 年 2 月 8 日

大阪市立大学

M. Hirasawa

The Alexander polynomial and signature of rational knots,

International conference on Topology and its Applications, A Joint conference with the 4th Japan-Mexico Topology conference,

2007 年 12 月 6 日

京都大学

[図書] (計 0 件) [産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ

<http://venus.kyy.nitech.ac.jp/~hirasawa>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

平澤 美可三 (HIRASAWA MIKAMI)

名古屋工業大学大学院工学研究科准教授

研究者番号 : 00337908