様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　５月２５日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：18740036
研究課題名（和文）　ホロノミー群に付随した一階微分作用素の研究

研究課題名（英文）　Study on the first order differential operators associated to holonomy groups

研究代表者
本間　泰史（HOMMA, Yasushi）
早稲田大学・理工学術院・准教授
研究者番号：50329108

研究成果の概要：
本研究は，幾何構造をもつ多様体上で，その構造に付随した一階微分作用素の性質を調べ，幾何学と大域解析学を結びつけることを目的とする．次のような研究成果を得た．
(a) ユークリッド空間上のスピン 3/2 ディラック作用素（ラリタ-シュインガー作用素）の多項式解の表現論的な意味付け．
(b) 複素射影空間上の正則同伴ベクトル束におけるラプラス型作用素の固有空間分解.
(c) 四元数ケーラー多様体上の微分作用素に対する消滅定理と曲率による下からの固有値評価.

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	**700,000**	**0**	**700,000**
２００７年度	**600,000**	**0**	**600,000**
２００８年度	**600,000**	**180,000**	**780,000**
年度			
年度			
総　計	**1900,000**	**180,000**	**2080,000**

研究分野：数物系科学　幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：Dirac 作用素，消滅定理，カシミール元，ワイゼンベック公式

１．研究開始当初の背景

1990 年代後半から 2000 年代前半にかけて，リーマン多様体上のディラック作用素を一般化した一階微分作用の研究が T. Branson を中心として行われ，楕円型性，消滅定理などの結果が与えられた．消滅定理は大域的な結果を与えるものであるが，土台になっているのはワイゼンベック公式とよばれる局所的な公式である．その後，本研究の研究代表者により，ワイゼンベック公式の表現論的な意味付けや，より計算可能な具体的公式が与えられた．局所的な公式であるので，考えている多様体のホロノミー群に依存するものであり，実際にケーラー多様体上のワイゼンベック公式及び消滅定理なども与えられた．

このようにして，ホロノミー群に付随した微分作用素を考察し，微分幾何学，調和解析学，大域解析学などを繋ぐ道具として開発することは非常に意味のあることである．
また，一方で，ディラック作用素を用いた解析を行うクリフォード解析学においても，その一般化を行うという研究が 1990 年代後半から行われている．特に，ディラック作用素がスピン１/２作用素とすれば，スピン 3/2 作用素であるラリタ・シュインガー作用素に対して，どの程度クリフォード解析学が一般化できるかということが議論されてきた．

２．研究の目的

上記の背景を踏まえ，この研究の目的は，微分幾何学で現れる各リーマン・ホロノミー群に対して，それに伴う一階微分作用を定義し．ディラック作用素を用いた幾何学であるスピン幾何学を一般化し，ホロノミー群ごとに統一的な理論を構築することが目的である．より，具体的に述べれば

（１）　ランク１の対称空間上の微分作用素に対するスペクトル分解を行い，研究代表者によるワイゼンベック公式から導かれる固有値評価が最適な評価であるかを探る．ただし，ホロノミー群が特殊直交群である球面の場合には，T. Branson が最適性を証明している．

（２）　スピン幾何学において特殊スピノール（キリングスピノールなど）を考察することは微分幾何学（スピン幾何学）では重要である．その一般化を行う．

（３）　これまでの研究により，リーマン多様体，ケーラー多様体上のワイゼンベック公式は得られている．そこで，より特殊な幾何学（四元数ケーラー，超ケーラー，G_2，Spin(7)）について同様の考察を行う．また，一般の対称空間 G/K の場合も，リー群 K から導かれるワイゼンベック公式を考える．

（４）　ディラック作用素に対して，クリフォードコーシー核という基本解が知られている．これを他の微分作用素へ一般化する．特に，ラリタ・シュインガー作用素という楕円型一階微分作用素であるが，２乗してもラプラス型とならない作用素について，多項式解や基本解を構成する．また，ラリタ・シュインガー作用素の局所指数定理を与える．

３．研究の方法

（１）　平成１８年度では対称空間上の gradient に対する研究を主に行った．ワイゼンベック公式が最適であることを証明するには，複素射影空間，四元数射影空間上の同伴ベクトル束上で各微分作用素のスペクトル分解が必要である．そこでまず，複素射影空間上の正則同伴ベクトル束上のラプラス作用素の固有値分解を行い，それが一般化できるかの考察を行った．また，１８年度の 8 月-9 月の 3 週間，チャールズ大学(チェコ)に滞在し,クリフォード解析及びパラボリック幾何に精通している Soucek 教授らと議論を行った．これは，T.Branson の手法が，複素射影空間，四元数射影空間にも適用可能かを議論するためである．また，滞在中にラリタ・シュインガー作用素の専門家である D. Eelbode 氏とも議論を行った．さらに，四元数ケーラー多様体上のワイゼンベック公式およびその応用についての論文を発表した．

（２）　平成１８年度１月ごろ Semellmann 氏,Weingart 氏が，本研究の研究対象であるワイゼンベック公式について斬新かつ統一的な結果を発表した．そのため，１８年度から１９年度にかけて，その結果と本研究の関わりについて考察した．

（３）　平成１９年度からは，D. Eelbode とコンタクトをとりながら，ラリタ・シュインガー作用素のコーシー核の具体的表示をもとめるため，３，４次元のユークリッド空間または球面上で，スペクトル分解および固有関数の球関数表示について研究した．

（４）　平成２０年度では，n 次元ユークリッド空間上のラリタ・シュインガー作用素の多項式解について，Trautman 氏によるスピノール微分複体と同様の手法を用いて研究を行った．

また，研究期間中に，国内，国外出張を行い，上記の研究に関して，関連する様々な分野の専門家と議論を行った．

４．研究成果

（１）　以前から研究を行っていた，四元数ケーラー多様体上の一階微分作用素に対するワイゼンベック公式，消滅定理，及びそれらのいくつかの応用（ツイスター理論など）について論文を発表した．また，この論文の発

表後，応用のいくつかが明らかになり，四元数ケーラー幾何に重要な道具となっていることがうかがえる．

（２）　複素射影空間上の正則同伴束の（滑らかな）切断を既約分解し，ラプラシアンに対する固有値，重複度，正則切断の特徴づけなどを行った．これらの結果は，今後，一般の作用素に対するスペクトル分解に役立つと思われ，現在も研究中である．

（３）　ラリタ・シュインガー作用素，ディラック作用素，ツイスター作用素の関係式を具体的に記述し，これをユークリッド空間上の spin 3/2-スピノール多項式へ適用し，ある種の完全系列を得ることに成功した．これは，Trautman によるスピノール多項式複体の一般化である．さらに，その完全系列からラリタ・シュインガー作用素の多項式解が調和多項式であるという興味深い結果を得た．また，多項式解の空間を表現論的に記述し，それが球面上の spin3/2-L^2 スピノールの既約分解と完全に一致していることを解明した．ここから，球面上のラリタ・シュインガー作用素のスペクトル計算ができることが示唆される．その計算については，今後の課題である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 １件）
(1) Yasushi Homma
"Estimating the eigenvalues on Quaternionic Kahler Manifolds"
International Journal of Mathematics Vol.17, No. 6. 665-691 (2006).

＊査読有

６．研究組織

(1)研究代表者
本間　泰史（HOMMA　YASUSHI）
早稲田大学・理工学術院・准教授
研究者番号：50329108