

平成21年5月25日現在

研究種目：若手研究（B）
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18740042
 研究課題名（和文） 離散凸解析アプローチに基づく非線形整数計画問題の実用的解法の研究
 研究課題名（英文） Study on Practical Algorithms for Nonlinear Integer Programs Based on Discrete Convex Analysis Approach
 研究代表者 塩浦 昭義(SHIOURA AKIYOSHI)
 東北大学・大学院情報科学研究科・准教授
 研究者番号：10296882

研究成果の概要：

整数計画問題とは、与えられた制約条件を満たす整数ベクトルの中から、与えられた目的関数を最小化（または最大化）する解を求める問題である。一般に整数計画問題は短時間で解くことが困難である、ということが理論的にも現実的にも知られている。とくに、目的関数と条件が非線形関数で与えられる非線形整数計画問題は、解くことが最も困難な整数計画のクラスである。本研究では、様々な非線形整数計画問題に対して、その良質な近似解を短時間で求めるアルゴリズムを提案した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,000,000	0	1,000,000
2007年度	1,200,000	0	1,200,000
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	360,000	3,760,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：組合せ最適化，非線形関数，整数計画，離散凸関数，近似解法，アルゴリズム，マトロイド，劣モジュラ関数

1. 研究開始当初の背景

(1) 整数計画問題とは、与えられた制約条件を満たす整数ベクトルの中から、与えられた目的関数を最小化（または最大化）する解を求める問題である。一般に整数計画問題は短時間で解くことが困難である、ということが理論的にも現実的にも知られている。とくに、目的関数と条件が非線形関数で与えられる非線形整数計画問題は、解くことが最も困難

な整数計画のクラスである。非線形整数計画問題の例は、生産計画，ロジスティクス，システム設計，ファイナンスなどの多彩な分野に現れる。近年では、このような応用分野において、非線形整数計画問題の良質な近似解を短時間で求めることが要請されている。

(2) 離散凸解析は1996年に室田氏（東京大）により提唱された理論であり，凸性をもつ離散関数の数学的な洞察を通じて「解きやす

い」非線形整数計画問題の理論的な枠組みを構築することを目的とする。申請者は離散凸解析の理論を構築するに当たって、室田氏と共同で研究を行ってきた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、非線形整数計画問題の良質な近似解を短時間で求める実用的なアルゴリズムを提案することであった。申請者の研究方針は次の通りであった。

- 「離散凸解析」の理論に基づき、離散非線形関数を離散凸関数により近似するための理論と技法を構築する。
- 離散凸近似の技法を利用して、非線形整数計画問題に対する高速な近似アルゴリズムを提案する。

3. 研究の方法

本研究課題の最終目的は、離散凸解析における技法を用いることにより、非線形整数計画問題の良質な近似解を実用的な時間内に求めるアルゴリズムを提案することであった。離散凸解析における既存の研究は、主に「解きやすい」非線形整数計画問題に注目していた。これに対し、本研究課題では、「離散凸近似」という手法を通じて、離散凸解析の枠組みを「解きにくい」非線形整数計画問題へ拡張するという、意欲的な試みでもある。本研究計画は以下の三段階から構成された。

- 離散凸近似の理論と技法を構築する。
- 非線形整数計画問題に対し、離散凸近似技法を利用した近似アルゴリズムを提案する。
- 提案したアルゴリズムをコンピュータ上で実装し、性能評価のための実験を行う。

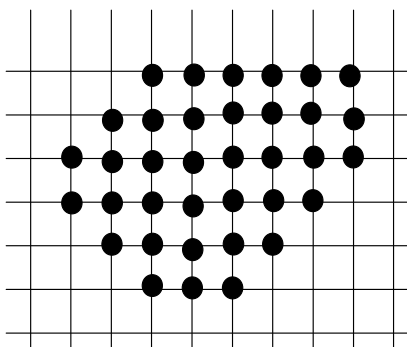


図 1：離散凸集合の例

4. 研究成果

(1) 「ジャンプシステム」と呼ばれる、良い性質を持った整数格子点集合上での離散凸関数の最小化問題に対して研究を行った。この問題は非線形整数計画問題の中でもきわ

めて基本的な問題である。既存の研究では、ジャンプシステムの特例である基多面体や双劣モジュラ多面体上での離散凸関数最小化に対して多項式時間アルゴリズムが提案されていた。これに対し、より一般的なジャンプシステム上でも、分離凸関数およびM凸関数の最小化問題が多項式時間で解けることを初めて示した。この結果は、高く評価されている論文誌に採択された。

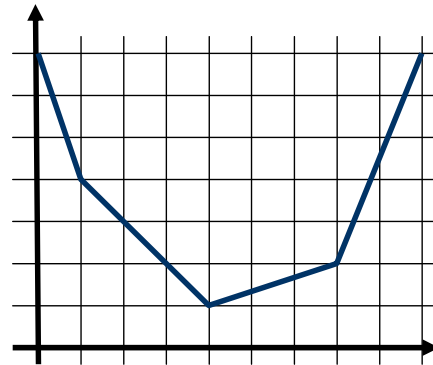


図 2：離散凸関数の例

(2) 与えられた区分線形凸関数を、複雑度の小さい関数によって近似するという問題に現在取り組んでおり、高精度な近似関数を効率的に求めるアルゴリズムの構築を行った。このアルゴリズムの実験的な近似精度は理論値より格段に良いため、理論的な近似精度の解析にはまだ改善の余地があると思われる。

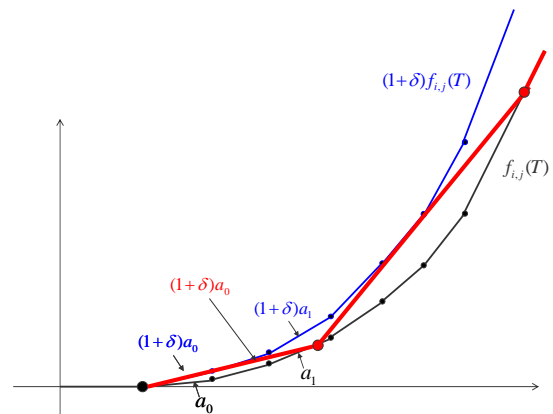


図 3：区分線形凸関数の近似方法その 1

(3) 「劣モジュラ関数の最大化」という、基本的であるが計算困難な問題についての研究を行った。ある種の劣モジュラ関数に対して適用可能な既存のアルゴリズムについてその特徴を検討したところ、離散凹性が鍵となっていることがわかった。この知見に基づき、このアルゴリズムがM凹関数の和というクラスに対しても適用可能であることを証明した。さらに、整数格子点上で定義され

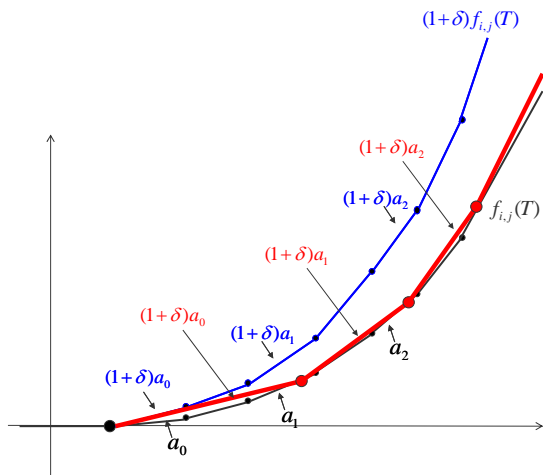


図 4 : 区分線形凸関数の近似方法その 2

る劣モジュラ関数に対してもこの結果が拡張できることを示した。この結果は、「離散凸性/凹性」というものの見方が非線形整数計画問題において重要であることを示している。さらに、より一般の劣モジュラ関数に対して可能かどうかを検討した。特に、整数格子点上で定義される関数については、ある程度の仮定を置かないと多項式時間での近似は困難であるが、妥当な劣モジュラ関数のクラス及びそれに対するアルゴリズムについて検討を行なった。

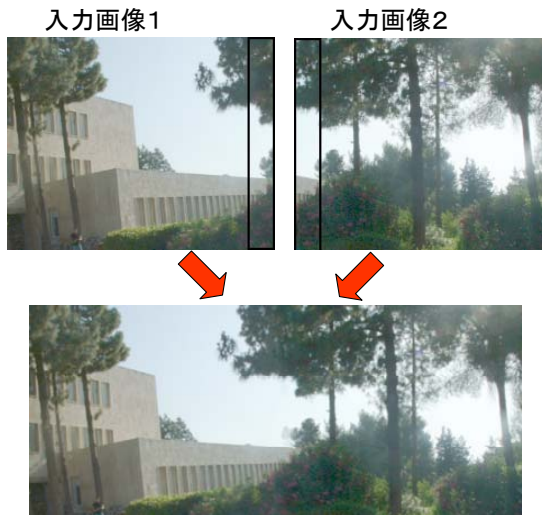


図 4 : 最小費用テンション問題の画像処理への応用例

(4) 変数の差に関する非線形整数計画問題である、最小費用テンション問題およびその拡張について取り組んだ。この問題に対し、室田(2003)により提案された貪欲算法が知られているが、このアルゴリズムの反復回数の詳細な解析を行い、既存の反復回数より大幅により結果を示すことが出来た。この解析

においては離散凸解析に関する過去の研究において示された、L 凸関数の持つ性質が本質的に効いている。また、提案したアルゴリズムを画像処理の問題に応用し、その性能表かを実験により行なった。

(5) M 凸関数の近接定理について再検討を行なった。M 凸関数の近接定理については、過去の論文において幾つかの結果を発表しているが、今年度の研究においては、より詳細な解析を行なった。その結果、M 凸関数最小化問題の最適解と、その緩和問題の最適解との間の距離のより厳密なバウンドを証明することに成功した。この結果の一部については既に論文にまとめ、現在は論文誌に投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Akiyoshi Shioura, On the Pipeage Rounding Algorithm for Submodular Function Maximization, Discrete Mathematics, Algorithms, and Applications 1 (2009) 1-23 査読有
- ② Kazuo Murota and Akiyoshi Shioura, Note on the Continuity of M-convex and L-convex Functions in Continuous Variables, Journal of the Operations Research Society of Japan 51 (2008) 265-273 査読有
- ③ Akiyoshi Shioura and Ken'ichiro Tanaka, Polynomial-time Algorithms for Linear and Convex Optimization on Jump Systems, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 21 (2007) 504-522 査読有
- ④ Akiyoshi Shioura and Takeshi Tokuyama, Efficiently Pricing European-Asian Options: Ultimate Implementation and Analysis of the AMO Algorithm, Information Processing Letters, 100 (2006) 213-219 査読有
- ⑤ Akiyoshi Shioura, Ning Sun, and Zaifu Yang, Efficient Strategy Proof Fair Allocation Algorithms, Journal of the Operations Research Society of Japan 49 (2006) 144-150 査読有

[学会発表] (計 9 件)

- ① 塩浦昭義, A Fast Divide-and-Conquer Algorithm for Polymatroid Optimization and Its Application to

Preemptive Scheduling Problems with Controllable Processing Times, 統計数理研究所研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」, 2009年3月25日, 統計数理研究所

- ② 塩浦昭義, Divide-and-Conquer Approach for Preemptive Scheduling Problems with Controllable Processing Times, 電子情報通信学会コンピュータシミュレーション研究会, 2008年10月10日, 東北大学
- ③ 塩浦昭義, Fast Divide-and-Conquer Algorithms for Preemptive Scheduling Problems with Controllable Processing Times: A Polymatroid Optimization Approach, 16th European Symposium on Algorithms, 2008年9月17日, ドイツ, カールスルーエ大学
- ④ 塩浦昭義, On the Pipage Rounding Algorithm for Submodular Function Maximization: A View from Discrete Convex Analysis, 統計数理研究所研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」, 2008年3月18日, 統計数理研究所
- ⑤ 塩浦昭義, 劣モジュラ関数最大化に対する近似アルゴリズムと離散凹性, 応用数理学会春の研究部会連合発表会, 2008年3月9日, 首都大学東京
- ⑥ 塩浦昭義, 凸費用ネットワークフロー問題の双対に対する効率的なアルゴリズムとそのコンピュータビジョンへの応用, 情報処理学会アルゴリズム研究会, 2007年11月30日, 新潟大学
- ⑦ 塩浦昭義, 最小費用テンション問題に対する算法と画像処理への応用, 日本オペレーションズリサーチ学会 2007年秋季研究発表会, 2007年9月27日, 政策研究大学院大学
- ⑧ 塩浦昭義, アメリカン・アジアンオプションの価格の近似に対する計算幾何学的アプローチ, 情報処理学会アルゴリズム研究会, 2007年5月11日, 岩手大学
- ⑨ 塩浦昭義, Polynomial-Time Algorithms for Convex Optimization on Jump Systems, Workshop on Advances in Optimization, 2007年4月20日, 東京工業大学
- ⑩ 塩浦昭義, ジャンプシステム上の最適化問題に対するアルゴリズム, 日本オペレーションズ・リサーチ学会計算と最適化研究部会, 2007年4月14日, 上智大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

塩浦 昭義 (SHIOURA AKIYOSHI)

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：10296882