

平成 21 年 6 月 9 日現在

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2006～2008

課題番号：18740046

研究課題名 (和文) 非線形放物型問題に対する有限要素法の事後誤差解析

研究課題名 (英文) A posteriori analysis of the finite element approximation for nonlinear parabolic problems

研究代表者

齊藤 宣一 (NORIKAZU SAITO)

所属機関・所属部局名・職名 東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号 00334706

研究成果の概要：

非線形放物型偏微分方程式の有限要素法による近似解法を考え、その事前・事後誤差評価を行い、数値解から解の定量的な情報を引き出すことに成功した。具体的な対象としては、差細胞性粘菌の凝集現象を記述する Keller-Segel 系や、解の爆発のモデル問題として有名な Fujita 方程式を扱った。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,700,000	0	1,700,000
2007 年度	900,000	0	900,000
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	270,000	3,770,000

研究分野：

科研費の分科・細目：

キーワード：有限要素法、誤差解析、非線形放物型偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式(PDE)のコンピュータによる数値シミュレーションは、狭い意味での理工学を超えて、生命科学、臨床医学、経済学にまで応用範囲を拡げ、幅広く有益な情報(computer predictions)をもたらしている。しかしその一方で、(A)実際の PDE の数値シミュレーション、(B)PDE の数値的解法の理

論的研究、(C)PDE の理論的な研究、の立場の間の溝は深まる傾向にある。(A)と(B)を例に取る。従来の意味での誤差解析とは、離散化パラメータ h に対して $h \rightarrow 0$ なるときの(厳密解と数値解の)誤差の挙動の解析すなわち誤差の定性的な解析(=事前解析)を意味し、これが証明された時点で誤差解析が完了したことになる。しかし、実際の数値計算

は有限の h に対して行われるものであり、応用家が知りたいのはある h に対する誤差の値あるいは範囲といった定量的な情報である。この溝を埋めるために事後解析とアダプティブメッシュ法が発達した。事後解析では誤差に関する計算可能な(すなわち数値解を用いて表現される)上下界(error indicator, 以後 EI)を求める。この EI を用いて誤差が相対的に大きい場所を特定し対象領域のメッシュの細分化(再構築)を行うのがアダプティブメッシュ法である。結果的に、指定した許容誤差内の数値解を得ることができる。事後解析自体は、少なくとも欧米では目新しい話題ではない。特に、時間定常問題に対しての蓄積は多く、楕円型問題についてはほぼ完成の域にある。しかし、時間発展問題に対しては、既存の結果を単純に各時間ステップで適用しているのみで、実用に耐えられるものはほとんど無い。(この点については詳細な文献調査をすでに行った。)その一方で、アダプティブメッシュ法の汎用ソフトウェアは数多く流付しているが、このような理論不在の中でのブラックボックスの使用は危険であり、警笛を鳴らす義務を感じる。

2. 研究の目的

本研究では、線形および非線形放物型時間発展問題の数値近似解に対する事後解析をおこなう。近似方法としては汎用性の観点から有限要素法を採る。期間内における具

体的到達目標は次の2つである：

1. 線形放物型方程式に対する事後解析

(I) 時間変数・空間変数の離散化の影響を別々に考え、それぞれに対する EI を導出する。特に、時間離散化の影響を調べる観点から、正則半群の有理関数近似の事後誤差解析を行う。

(II) 解から定まる2次的な量(自由エネルギーなどの物理量)についての EI も同時に導出し研究する。

(III) 解の持つ物理的性質の保存の観点から、集中質量近似の影響も正面から捉える。

2. 爆発解をもつ非線形放物型問題に対する事後解析

(I) 爆発についての情報がある程度既知な方程式(藤田方程式を想定)について、上記1の結果を応用・拡張。

(II) 爆発についての情報が皆無な問題(Keller-Segel 系を想定)について、上記1の結果を応用・拡張。

3. 研究の方法

初年度：線形放物型方程式に対する考察(研究目的1(I)の項)を始める。理論的考察とともに数値実験による発見的考察にも重きを置く。ある程度討論できるような成果が出てきた段階で、国内の数値解析の研究者と研究連絡を行い、結果の有効性・妥

当性・新規性について、改めて意見を聞く。
また、アダプティブメッシュの汎用ソフト
用いている専門家に、レビューを受ける。
2年目以降：前年度に得られた結果の brush
up を行いつつ、考察の中心を非線形問題
(研究目的2(I)(II)の項)に移す。特に 2(I)
については、爆発解にも対応しうる EI の導
出と数学的証明、またそれらを検証する数
値実験を完全な形で提出したい。(そのため
に藤田問題 $u_t = u + u^p$, $p > 1$ というやや
人工的な問題を選んだ。)しかし、2(II)に
ついては、期間内に数学的証明をすべて完
成させるのは、問題の複雑さから考えて困
難と思われる。したがって、2(I)の成果を
手がかりにして、数値実験による発見的な
考察を前面に出し、意味ある EI の導出を行
うことを目標に据える。

4. 研究成果

Keller-Segel 系に対して、有限要素法の事
前・事後解析を行って、既存の事前解析の精
密化に成功した。また、事後解析の成果を
適用して解の定量的な情報を引き出すこと
に成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に
は下線)

[雑誌論文](計 11 件)

- [1] K. Ohmori and N. Saito: Flux-free
finite element method with Lagrange
multipliers for two-fluid flows,
Journal of Scientific Computing. Vol.
32, No. 2 (2007) 147-173.
- [2] N. Saito: Conservative upwind finite
element method for a simplified
Keller-Segel system modelling
chemotaxis, IMA Journal of Numerical
Analysis. Vol. 27, No. 2 (2007)
332-365.
- [3] K. Ohmori and N. Saito: On the
convergence of finite element
solutions to the interface problem for
the Stokes system, Journal of
Computational and Applied Mathematics,
Vol. 198, No. 1 (2007) 116-128.
- [4] N. Saito: On interpolation spaces in
a polygon, 富山大学人間発達科学部紀
要, 第 2 巻, 第 1 号, 7-12, 2007 年
- [5] 林賢治, 齊藤宣一: 腫瘍の浸潤を記述す
る数理モデルへの差分法, 日本応用数理
学会論文誌, 第 17 巻, 第 3 号, 2007 年,
331-345.
- [6] N. Saito: An interpretation of the
Scharfetter-Gummel finite difference

scheme, Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, Vol. 82, No. 10 (2006) 187-191.

- [7] K. Ohmori and N. Saito: Mass conservative finite element method with Lagrange multipliers for two-fluid flows, Proceedings of the Seventh China-Japan Joint Seminar on Numerical Mathematics, Z. Shi and H. Okamoto eds., Science Press, Beijing, China (2006) 107-119.
- [8] N. Saito and T. Suzuki: Field variation and mathematics of blowup, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol. 1505 (2006) 106-120.
- [9] A. Kubo, N. Saito, T. Suzuki and H. Hoshino: Mathematical models of tumour angiogenesis and simulations, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol. 1499 (2006) 135-146.
- [10] H. Fujita and N. Saito: Shape-dependence of convergence rates in DDM, Domain Decomposition Methods: Theory and Applications, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications, Gakkotosho, Vol. 25 (2006) 241-271.
- [11] N. Saito: On a duality in $W^{1,p}$ defined on nonsmooth domains, 富山大学教育学部紀要, No. 60 (2006) 107-115.

〔学会発表〕(計 1 件)

走化性 Keller-Segel 系の有限要素近似, 日本数学会(応用数学分科会), 特別講演, 埼玉大学理学部, 2007年3月27-30日

〔その他〕

6. 研究組織

(1) 研究代表者

齊藤 宣一