

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2006 ～ 2008

課題番号：18740053

研究課題名（和文） ランダムウォークの揺動理論の DLA モデルへの応用

研究課題名（英文） Fluctuation theory for random walks and its application to the diffusion limited aggregation model

研究代表者

磯崎 泰樹 (ISOZAKI YASUKI)

大阪大学・大学院理学研究科・講師

研究者番号：90273573

研究成果の概要：一次元非粘性バーガース方程式に、ホワイトノイズの初期条件を正の半直線上で与え、負の半直線上にはマイナス無限大を与えた系を研究し、質量流の性質を統計的に記述した。

揺動理論の二次元ランダムウォークへの種々の拡張を行った。二次元ランダムウォークが半無限直線へ初めて到達する時刻・場所をふくむ詳細情報に関する確率分布の裾野の漸近評価を得た。

二次元ブラウン運動でも半直線への初到達時刻の詳細情報に関する漸近評価を得た。二次元ランダムウォークの場合と同じ特徴的な定積分を導出したが、その出現に到る過程はまったく異なっていた。

片側の跳躍のみを持つレヴィ過程が初めて出発点を下回るときの値の確率分布を研究した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	800,000	0	800,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,600,000	210,000	2,810,000

研究分野：確率過程論

科研費の分科・細目：数学一般（含、確率・統計）

キーワード：揺動理論、ランダムウォーク、DLA モデル、初到達時刻

1. 研究開始当初の背景

DLA(拡散律速凝集)とは、溶液からの溶質の析出において、凝固熱の拡散の遅さが析出の速度を規定する場合に、析出した溶質が結晶格子にならずに、シダやヒノキの葉のような複雑な形になることから注目を集めた現象

である。この形状を記述するパラメータとしては、ハウスドルフ次元が代表的である。

DLA の数理モデルとして、格子の点の有限集合を溶質のクラスタとみなすモデルが提案された。格子の上を動くランダムウォークが、既に形成されたクラスタの隣接点に到達し

たら、そのクラスタに参加したと解釈し、次に新たに十分遠い点からランダムウォークを出発させ、同じ手順を繰り返すことによって、クラスタを成長させるのである。このDLAモデルにより形成されるクラスタのハウスドルフ次元については、物理学者による研究が多くあり、数値実験などの方法により、或る次元が予想されている。数学的な厳密さをもった証明には誰も至っていないが、ある次元以上、ある次元以下であることは証明されている。このとき、極端な形状としての、半無限直線へはじめてランダムウォークが到達する時刻が利用された。

本研究代表者のこれまでの研究は、遥動理論を利用して、揺動型汎函数の初到達時刻に関する漸近評価を行うものを含んでおり、半無限直線へのランダムウォークの初到達時刻への応用の可能性があった。

数理論における確率モデルにとって、確率過程の漸近評価はしばしば重要である。本研究代表者のこれまでの研究の一つは、ブラウン運動の軌跡など、ランダムな初期条件を持つ非粘性バーガス方程式の解を持つ、微小な不連続性、つまり、小さい質点の統計的解析に関連する、ブラウン運動の時間積分の漸近評価であった。同方程式の解の、ほかの側面を解析するときにも、これまでの研究成果が有用であると予想された。

2. 研究の目的

(1) DLAモデルの深い理解に必要な、二次元ランダムウォークの性質を調べる。遥動理論の応用可能性を詳細に調べ、さらに、それに基づき、DLAモデルへの応用可能性を探る。

(2) 半無限直線への二次元ランダムウォークが初めて到達する時刻および到達場所などの詳細情報を、本研究代表者のこれまでの研究成果に基づき解析する。

遥動理論において、初到達時刻が扱えることは広く知られているが、追加的情報を含む定理はほとんど知られていない。二次元ランダムウォークが半無限直線へ初めて到達する時刻にかんする定理は、2, 3の例が知られているが、到達場所、直線の反対側に滞在した回数など、詳細情報を含む定理は皆無である。

(3) 二次元ブラウン運動は、二次元ランダムウォークのスケール極限として知られているが、二次元格子の中の半無限直線を、二次元ユークリッド空間の中の半無限直線に置

き換えて、初到達時刻を定義できる。これについても、二次元ランダムウォークと同様の漸近評価が成り立つかどうかは、確率過程論の観点からは興味深い問題である。揺動理論も、スケール極限に対応して、連続時間版が必要となるが、本研究代表者のこれまでの研究成果の中には、その範疇の定理があり、応用可能性が予想される。

(4) より広い種類の数理論モデルに対し、遥動理論の応用可能性を探る。例えば、レヴィ過程に対する遥動理論の、古典的リスク過程と呼ばれる保険数学モデルへの応用も探る。

3. 研究の方法

DLAモデルへの有益な知見をあたえるためには、遥動理論の定理がどのような情報を盛り込めばよいかという見地からの定理の拡張を試みる。

DLAモデルに関する、数理論・確率論における研究成果を調査するとともに、計算機を用いたシミュレーションを行って、DLAモデルとランダムウォークが持ちうる統計的性質を探る。図書、文献により調査するとともに、この分野の研究者との連絡を取り、最新の研究状況についての情報を収集する。

予期される問題点としては、DLAモデルが示す振舞いのうち、それがモデル依存であり、どれがDLA現象の本質をあらわすものであるか、区別が難しいことが考えられる。この問題が生じたときの対応策としては、DLAモデルの基盤となるランダムウォークが動く格子を変更して計算機シミュレーションを行うこと、および、物理学と数学の両方の研究者に意見を求めることが挙げられる。幸い所属研究機関では、数学と物理学の共同のCOEプログラムを立ち上げるなど、接触の機会が多く確保されており、本研究に資する面が大きかった。

4. 研究成果

(1) 一次元非粘性バーガス方程式に、ホワイトノイズの初期条件を正の半直線上で与え、負の半直線上にはマイナス無限大を与えた系を研究した。

これは、真空に向かって放出・拡散する完全非弾性粒子のモデルになっている。

本研究では、遠方まで到達した粒子の総質量を、重複対数のオーダーで表すことができた。初期条件がホワイトノイズの原始関数の場合も研究し、質量流の長時間漸近挙動に関する

る重複対数の法則を得た。
さらに精密化して、質量流の下級関数と上級関数の特徴づけを得た。

(2) 一次元ランダムウォークの正の半直線への初到達時刻についての揺動理論 (Sparre Andersen の定理) に関連して、二次元確率過程への種々の拡張を行った。これらの拡張された定理がふくむ情報は、二次元ランダムウォークの第一成分の最大値や、最大値に初めて到達した時刻、最後に到達した時刻、さらには、それらの時点でのランダムウォークの第二成分の値などである。

これを利用して、二次元ランダムウォークが半無限直線へ初めて到達する時刻・場所をふくむ詳細情報に関する確率分布の裾野の漸近評価を得た。

漸近評価においては、公式集にも載っていない興味深い定積分が出現したが、その源は特性関数のある種の母関数の、ポアソン核による定積分だった。母関数は漸近的に対数関数を作り出し、ポアソン核は逆正接関数の導関数を作り出していた。

(3) 上記の研究を拡張し、連続時間の類似した性質を持つ確率過程、すなわち二次元ブラウン運動でも、半直線への初到達時刻・場所をふくむ詳細情報に関連する漸近評価を得た。ランダムウォークの定理では半直線の反対側での滞在回数を扱っていたが、ブラウン運動では半直線の反対側での局所時間を扱っている。

手法はランダムウォークの場合とは全く異なるものであり、レヴィ過程に対する連続時間の二次元揺動理論・3変数ラプラス変換に対するレゾルベント方程式・Frullani 積分を組み合わせて利用した。

ランダムウォークの結果に出現した、公式集にも載っていない興味深い定積分が、ブラウン運動の場合でも出現したが、その出現に到る過程はまったく異なっていた。Frullani 積分が対数関数を作り出し、ラプラス変換を特性関数で積分表示する式から逆正接関数の導関数が出ていた。

(4) 一次元ランダムウォークのうち、負の向きには大きな跳躍を持つが、正の向きには1ずつしか跳ばないものは、リスク理論の興味から、これまでに多くの研究がある。そこで得られている恒等式のひとつに、初めて出発点を下回るときの値の確率分布が、跳躍を特徴付けるレヴィ測度ではなく、レヴィ測度の裾野つまり積分を密度とするものであることが挙げられる。この食い違いに着目し、連続時間の場合に拡張を試みた。「片側の跳躍のみを持つレヴィ過程」として知られる分野の結果を応用して、類似の結果を得たが、も

しろん手法はランダムウォークの場合とは全く異なるものである。さらに、当該恒等式の本質が、「exit system」として知られる、より一般のマルコフ過程について成り立つ原理と結びついていることもわかった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

① 磯崎泰樹, An asymptotic estimate for the hitting time of a half-line by two-dimensional Brownian motion, To appear in Journal of Mathematics of Kyoto University, 頁未定, 2009, 査読あり

② 磯崎泰樹, Fluctuation identities applied to the hitting time of a half-line in the plane, J. Theoretical Probability, 22, 57-81, 2009, 査読あり

③ 磯崎泰樹, On some laws of iterated logarithm for Burgers turbulence with Brownian initial data based on the concave majorant, Osaka Journal of Mathematics, 43, 239-261, 2006, 査読あり

[学会発表] (計4件)

① Fluctuation identities applied to the hitting time of a half line in the plane, 'Probability Theory and Related Topics'-Oidemase-Yamaguchi Symposium セントコア山口 (山口県山口市), 2006年11月14日

② A review on ERRW with emphasis on the Diaconis walk on the half line, 広島大学確率論セミナー, 広島大学, 2006年10月17日

③ 二次元ランダムウォークの揺動理論の応用, 九州確率論セミナー, 九州大学, 2006年6月30日

④ 二次元ランダムウォークの揺動理論の応用, 大阪大学確率論火曜セミナー, 大阪大学, 2006年5月16日

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

磯崎 泰樹 (ISOZAKI YASUKI)

大阪大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号：90273573

(2)研究分担者
()

研究者番号：

(3)連携研究者
()

研究者番号：

(7) ○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計10件)

- ① 学振太郎、半蔵門一郎、学振花子、論文名、掲載誌名、巻、最初と最後の頁、発表年(西暦)、査読の有無
- ② 学振太郎、論文名、掲載誌名、巻、最初と最後の頁、発表年(西暦)、査読の有無
- ③ 学振花子、論文名、掲載誌名、巻、最初と最後の頁、発表年(西暦)、査読の有無

〔学会発表〕(計5件)

- ①
- ②
- ③

〔図書〕(計2件)

- ①
- ②

[産業財産権]

○出願状況 (計□件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計◇件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]

ホームページ等

http://○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

6. 研究組織

(1) 研究代表者

学振 太郎 (GAKUSHIN TARO)
○○大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：

(2) 研究分担者

学振 花子 (GAKUSHIN HANAKO)
○○大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：

学振 次郎 (GAKUSHIN JIRO)
○○大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：

学振 三郎 (GAKUSHIN SABURO)
○○大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：

(3) 連携研究者

学振 四郎 (GAKUSHIN SHIRO)
○○大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：