

平成 21 年 5 月 22 日現在

研究種目: 若手研究 (B)
 研究期間: 2006~2008
 課題番号: 18740056
 研究課題名 (和文) 表面張力を考慮した移動境界流れ問題の数値解析手法の研究

研究課題名 (英文) Research on numerical schemes for
 moving boundary problems with surface tension

研究代表者
 田上 大助 (TAGAMI DAISUKE)
 九州大学・大学院数理学研究院・准教授
 研究者番号: 40315122

研究成果の概要: 河川・海洋で発生する水波や加振された容器内の液体振動のような移動境界を持つ流れは理論的にも実用的にも重要な物理現象の一つであり, 数値計算によって現象を理解しようという試みが活発に行なわれている. しかしながら用いる計算手法に対する数学的な理論整備は遅れている. そこで研究代表者は, 移動境界流れ問題の数値計算に必要となる数学的な理論整備を進めた. また, 対応する数値計算も行なった.

交付額

(金額単位: 円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	2,100,000	0	2,100,000
2007 年度	700,000	0	700,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,600,000	240,000	3,840,000

研究分野: 数物系科学

科研費の分科・細目: 数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード: 移動境界流れ問題, 表面張力, ナヴィエ・ストークス方程式, 熱対流問題, 光波散乱問題, 有限要素法, PC クラスタ

1. 研究開始当初の背景

(1) 河川・海洋で発生する水波や加振された容器内の液体振動のような移動境界流れ問題の理論上・実用上の重要性から, その数値計算手法自体は比較的古くから研究されていた. 例えば, ALE 法 (Hirt, C.W., et al., An Arbitrary Lagrangian-Eulerian

Computing Method for All Flow Speeds, J. Comp. Phys., Vol.14, 1972, pp.227-253) や VOF 法 (Hirt, C.W., et al., Volume of Fluid Method for the Dynamics of Free Boundaries, J. Comp. Phys., Vol.39, 1981, pp.201-225) などの様々な計算手法が考案され, その後も Tezduyar らにより安定化有限要素法を利用した界面追跡法 (Tezduyar, T.E.,

Computation of Moving Boundaries and Interfaces and Stabilization Parameters, *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, Vol.43, 2003, pp.555-575) など多くの研究者の手でその改良が行なわれている。

- (2) 一方で、用いる計算手法に対する数学的な理論整備は非常に遅れていた。例えば、Formaggia ら (Formaggia, L., et al., *Stability Analysis of Second-Order Time Accurate Schemes for ALE-FEM*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.193, 2004, pp.4097-4116) のように、数学的正当化が行なわれてきた問題の多くは、平均曲率流や移流拡散方程式などの特定の数理モデルに限ってなされていた。工学的な実用問題で現れるような、流れの支配方程式としてより一般的な、ナビエ・ストークス方程式を数理モデルに考えている研究はなされていなかった。
- (3) また本研究課題の評価に必要となることが予想されていた離散 Gronwall 不等式を適用するための非線形残差項の取り扱い、連続問題における解の漸近挙動に関する西田らの結果 (Nishida, T., et al., *Navier-Stokes Flow Down an Inclined Plane: Downward Periodic Motion*, *J. Math. Kyoto U.*, Vol.33, 1993, pp.787-801) や、研究代表者が行なってきた流れ問題に対する数値解析 (TAGAMI D. and ITOH H., *A Finite Element Analysis of Thermal Convection Problems with the Joule Heat*, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, Vol.20, No.2, 2003, pp.193-210; TABATA M. and TAGAMI D., *Error Estimates for Finite Element Approximations of Drag and Lift in Nonstationary Navier-Stokes Flows*, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, Vol.17, No.3, 2000, pp.371-389; TABATA M. and TAGAMI D., *A Finite Element Analysis of a Linearized Problem of the Navier-Stokes Equations with Surface Tension, Part I: the Stationary Problem*, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.38, No.1, 2000, pp.40-57) の展開の一例と見なすことができた。

2. 研究の目的

- (1) 前項で述べた、移動境界流れ問題の数値解析に対する研究背景を受けて、研究代表者は、固定領域上における流れ問題の有限要素解析で得た成果を応用し、ナビエ・ストークス方程式に支配される移動境界流れ問題の数値計算に対する数学的な理論整備を進めていくことで、数学的・実用的いずれの観点から見ても有効性のある計算手法の展開を目指すとの着想

に至った。

- (2) 本研究課題ではその第一歩として、ナビエ・ストークス方程式に支配される斜面上の薄膜流れに代表されるような移動境界流れ問題を取り上げ、表面張力を考慮した移動境界流れ問題に対する計算手法の提案とその数学的正当化、正当化した手法に基づくプログラムの開発・実装と現実問題への適用、の2点を目的とする。

3. 研究の方法

- (1) まず、移動界面を用いて定義された適当な微分同相写像を使って、図1に示すように、流体領域を固定領域に変換する。そして固定領域上の高階微分の境界条件を持つ非定常ナビエ・ストークス方程式の有限要素解析を行なう。これにより固定領域問題における移動界面に対する誤差評価が得られる。

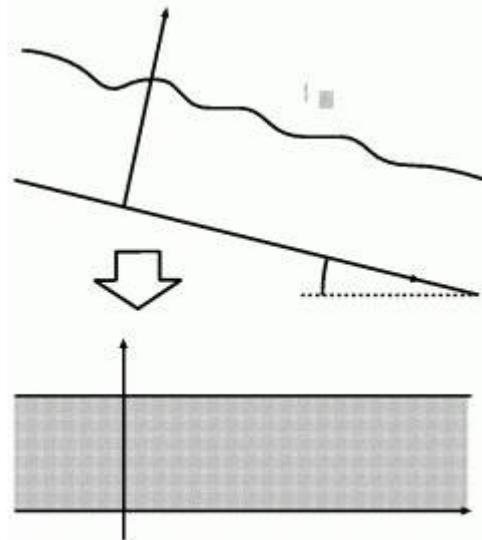


図 1: 斜面を流れる移動境界流れとその固定領域化。

- (2) 次に、微分同相写像の離散化手法を提案し、得られた移動界面の誤差評価を利用して固定領域化に用いた微分同相写像の離散化誤差の評価を行なう。
- (3) さらに、得られた微分同相写像の評価、および‘研究開始当初の背景’欄で述べた文献で研究代表者がこれまでに得た固定領域上でのナビエ・ストークス方程式や熱対流方程式に関する成果を応用して、表面張力を考慮した移動境界流れ問題の有限要素解析を行なう。
- (4) 最後に、正当化した計算手法の現実問題への適用と物理現象の考察を行なうため

の準備として、PC クラスタを導入し、熱対流問題や光波散乱問題などの関連する問題を含めた数値計算を実行する。

4. 研究成果

- (1) 高階微分の境界条件を持つ非定常ナビエ・ストークス方程式の有限要素解析: 本研究課題が対象とする問題の固定領域化によって導かれるこの方程式は、固定領域化に伴う変数変換と表面張力の考慮により、通常よりも強い位相での安定性が必要となること、高次の非線形性が存在すること、といった 2 点の特徴を持つ。これらの特徴に対応するためには、非線形残差項に対する評価を行なう際に離散 Gronwall 不等式の適用方法を工夫する必要がある。既に流れ問題の有限要素解析で提案している手法を応用することで、より非線形性の強い残差項の評価に対する基礎的な知見を得ることができた。
- (2) PC クラスタ導入へ向けた準備: 非定常問題における時間刻みごとの計算を高速化して高精度な数値実験を短時間で実行するために、現有設備よりも単体で約 1.5 倍の演算能力を持つ計算機を導入した。これにより、効率の良いプログラム開発および数値実験が可能となった。また、現有設備よりも高い演算能力を持った PC クラスタ構築のための知見を得ることができた。
- (3) 熱対流問題の有限要素計算: 研究代表者が理論的な正当化を行なった、物理係数が温度に依存する熱対流問題に対する有限要素法を、現実のガラス溶融炉問題の解析に適用し、電極配置の違いによる熱収支の変化を基に、より適した操炉条件を得るための調査を行なった。調査に前述の PC クラスタを利用することで、その試験運用の役割を果たすことができた。また、熱収支の有限要素計算に関する誤差評価も得ることが出来た。ここで扱った熱対流問題は、既に述べたように、その非線形残差項の評価が本研究課題における目的達成のための基礎になるため、関連する様々な基礎的知見を得ることが出来た。
- (4) 表面張力を考慮した移動境界流れ問題の有限要素解析: 本研究課題では、問題の固定領域化を考えることにより、ある微分同相写像が現われる。この段階は本研究課題の主要部分であり、微分同相写像の離散化によって生じる、固定領域化に用いる微分同相写像の評価、新たな非線形残差項の評価と離散 Gronwall 不等式の適用、

が解析の中心となる。微分同相写像が移動界面の領域全体への拡張で定義されることから、これまで非定常熱対流問題で得られている非線形残差項の評価を応用する。特に、非線形残差項に対する評価を行なう際に離散 Gronwall 不等式の適用方法を工夫する必要がある。研究代表者が前年度までに得ていた、熱対流問題の有限要素解析で提案している手法を応用することで、より非線形性の強い残差項の評価を得ることができた。

- (5) 熱対流問題や光波散乱問題の有限要素計算: 整合流束法を用いた熱対流問題における熱収支の有限要素計算を、本研究課題で構築した PC クラスタを利用して実行した。ここで扱った熱対流問題は、既に述べたように、その非線形残差項の評価が本研究課題における目的達成のための基礎になるなど、密接に関連している。同様に、ある光波散乱問題に対する有限要素計算も構築した PC クラスタにより行なった。最後に、表面張力を考慮した異動境界流れ問題の有限要素計算の実装も行なった。
- (6) 以上のことから、本研究課題により、従来は考察されていなかった工学的にも重要なより一般の数理モデルに基づく移動境界流れ問題に対して、現実問題への数値計算の適用とその改良に比較して大きく遅れている、数学的な理論整備とその実証計算に対する第一歩を踏み出すことができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① TAGAMI Daisuke: Numerical Computations of Energy Balances in a Glass Melting Process, Proceedings of the 2nd International Conference on Approximation Methods and Numerical Modelling in Environment and Natural Resources, Vol.1 (2008), pp.435-437, 査読無。
- ② TAGAMI Daisuke: Numerical Computations of Energy Balance in Thermal Convection Problems, The 20th Computational Mechanics Conference, Vol.07-36 (2007), pp.30-31, 査読無。
- ③ TAGAMI Daisuke: 3-dimensional Thermal Convection Analysis in the Glass Production Furnace, Proceedings of the Conference on

Computational Engineering and Science, Vol.11 (2006), pp.281-282, 査読無.

- ④ TAGAMI Daisuke, Numerical Computations of the Energy Balance in a Glass Melting Process, The 19th Computational Mechanics Conference, Vol.06-9 (2006), pp.13-14, 査読無.

[学会発表] (計 17 件)

- ① 田上 大助: 光波の散乱現象の有限要素計算, 日本応用数理学会研究部会連合発表会, 2009年3月8日, 京都市.
- ② 田上 大助: 光の干渉・散乱現象の有限要素計算, 応用数学合同研究集会, 2008年12月16日, 大津市.
- ③ 田上 大助: 光の散乱問題の有限要素解析, 研究集会 流れ問題のための高品質数値解法と計算機援用解析学, 2008年11月18日, 金沢市.
- ④ TAGAMI Daisuke: Error Estimates of Some Boundary Flux Quantities, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2008 (CJS2008), 2008年9月6日, 宮崎市.
- ⑤ TAGAMI Daisuke: Numerical Analysis of Energy Balances in Thermal Convection Problems, 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008), 2008年7月3日, イタリア・ベネチア.
- ⑥ 田上 大助: 熱対流問題におけるエネルギー収支の誤差解析, 応用数学合同研究集会, 2007年12月19日, 大津市.
- ⑦ 田上 大助: 熱対流問題における熱収支の数値計算, 第 20 回計算力学講演会, 2007年11月26日, 京田辺市.
- ⑧ 田上 大助: 磁場問題への反復法適用に関する一考察, 研究集会 流れ問題のための高品質数値解法と精度保証計算, 2007年11月21日, 松江市.
- ⑨ TAGAMI Daisuke: A Reduction Approach of Mixed Finite Element Methods in Magnetic Fields Problems, ICIAM07, 2007年7月16日, スイス・チューリッヒ.
- ⑩ TAGAMI Daisuke: Numerical Computations of Energy Balances in a Glass Melting Process, MAMERN'07, 2007年7月12日, スペイン・グラナダ.

- ⑪ TAGAMI Daisuke: Finite Element Analysis of Thermal Convection Problems and its Applications to a Glass Product Process, INSF2007, 2007年6月27日, 福岡市.

- ⑫ 田上 大助: 磁場問題への反復法適用に関する一考察, 研究集会 流れ問題の数値解析と精度保証付き数値計算, 2006年11月21日, 静岡市.

- ⑬ 田上 大助: あるガラス溶融工程における熱収支の数値計算, 第 19 回計算力学講演会, 2006年11月5日, 名古屋市.

- ⑭ 田上 大助: 混合型有限要素法の簡略化と反復解法の適用, 第 194 回 九州大学数値解析 (Q-NA) セミナー, 2006年10月17日, 福岡市.

- ⑮ TAGAMI Daisuke: 3-dimensional Thermal Convection Computations in the Glass Production Furnace, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2006 (as part of the Czech and Slovak Twin Seminar in Applied Mathematics), 2006年9月14日, チェコ・プラハ.

- ⑯ TAGAMI Daisuke: A Reduction Approach to Large Scale Magnetic Fields Problems, First Slovak-Japan workshop on Computational Mathematics (as part of the Czech and Slovak Twin Seminar in Applied Mathematics), 2006年9月11日, スロバキア・ココブス.

- ⑰ 田上 大助: 溶融ガラスの熱対流現象の有限要素解析, 第 11 回計算工学講演会, 2006年6月13日, 吹田市.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田上 大助 (TAGAMI DAISUKE)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

研究者番号: 40315122

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: