様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目：若手研究(B)
研究期間：2006～2008
課題番号：１８７４００５８
研究課題名（和文） 多項式時間で解ける巡回セールスマン問題から車両配送問題への拡張
研究課題名（英文） Applying some polynomially solvable cases of the traveling salesman problem to the vehicle routing problem

研究代表者
小田　芳彰（ODA YOSHIAKI）
慶應義塾大学・理工学部・講師
研究者番号：90325043

研究成果の概要：
巡回セールスマン問題は与えられた複数の都市をすべて１回ずつ通り、出発点に戻ってくるような最短経路を見つける問題である。この問題は基板の穴あけなど実社会の問題にも直結する有名な最適化問題の１つである。しかし、都市数が増えるにつれ、コンピュータを利用しても計算にかかる時間が指数的に増大する。そこで、問題がどのような条件をみたしていれば、実用的な時間で解が得られるかという研究がなされてきた。本研究では、この効率よく解ける状況を考察するとともに、巡回セールスマン問題におけるこれらの条件を車両配送問題に適用した場合に、最適解がもつ構造を明らかにした。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,300,000	0	1,300,000
2007 年度	1,100,000	0	1,100,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,500,000	330,000	3,830,000

研究分野：組合せ論
科研費の分科・細目：数学、数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：組合せ論、離散数学、アルゴリズム論、巡回セールスマン問題、計算量理論

１．研究開始当初の背景
巡回セールスマン問題(traveling salesman problem、以下 TSP)とは与えられた複数の都市をすべて１回ずつ通り、出発点に戻ってくるような最短経路を見つける問題である。この問題は NP 困難のクラスに属し、都市数が増えたとき実用的な時間(多項式時間)で最短経路(最適解)を求めるのは不可能と予想される代表例になっている。そこで、実社会での応用の観点から、実用的な時間で最適解に近い解を求める近似解法の研究がさかんに行われてきた。その一方、理論的な観点からはどのような性質があれば、TSP の最適解が多項式時間で得られるかについて研究されてきた。本研究代表者は、代表者らが考案した緩和したピラミッド型巡回路を用いた多項式時間で解けるクラスについて離散幾何学、計算幾何学の観点から取り組んできた。本研究では、TSP を含む、より一般的な問題に対し、多項式時間で解けるかについて考察

した。しかし、本研究開始前までは、このような研究はほとんどなされていなかった。

２．研究の目的
１．研究開始当初の背景で述べたように、本研究代表者は、本研究開始前までに、代表者らが考案した緩和したピラミッド型巡回路を用いた多項式時間で解けるクラスについて離散幾何学、計算幾何学の観点から取り組んできた。本研究では、これまでの研究で得られた結果、知見をもとに TSP の一般化である車両配送問題(vehicle routing problem、以下 VRP)の多項式時間で解けるクラスについて取り組む。ここでは一般的には平面性や幾何的な条件を仮定しないことが多いが、実用的な面も意識し、平面性や幾何的な条件を仮定する問題についても考察する。

３．研究の方法
本研究を行うにあたって取った方法のうち特筆すべきことは次の３つである。

(1) まず、TSP、VRP に関する既存の結果を網羅的に把握し、既存のいくつかの条件の間の類似点と異なる点を明確にした。VRP へこれらの条件を適用する際にその類似点を考慮することにより、統合された結果を得ることができた。

(2) 国内の組合せ論研究者にとどまらず、当該分野や関連分野の研究者と可能な限り研究打合せを行うよう努めた。特に、離散アルゴリズム、計算幾何学の著名な研究者であるカナダのマギル大学 David Avis 教授のグループとは制約つき車両配送問題の最適解を得るアルゴリズムの時間計算量に関する研究や、平面上の凸状に配置された n 頂点のハミルトン閉路のフリップ操作に関する研究を行い、部分的な結果を得た。また、巡回セールスマン問題の多項式時間で解けるクラスに関する分野の第一人者であるイギリスのウォーリック大学 Vladimir Deineko 准教授とは平面性と関連のある対称空間上の条件について共同研究を行った。

(3) 必要に応じてプログラムを作成し、コンピュータによる計算を行った。例えば、平面上の凸状に配置された n 頂点のハミルトン閉路をフリップ操作によって交差を解消する研究については、n の値が小さいところについてはすべてのハミルトン閉路について探索することにより、予想が正しいことを確認した。また、TSP、VRP についても与えられた問題例（インスタンス）がさまざまな条件をみたしているかどうかのチェックやすべての最適解を調べあげる際にプログラムを実装することにより確認した。

４．研究成果
TSP はグラフ理論の用語を用いると、n 頂点完全重みつき有向グラフに対し、重みの和が最小のハミルトン閉路を求める問題と表現される。TSP を次のように一般化した問題を車両配送問題とよぶ。

車両配送問題(VRP)：n 頂点完全重みつき有向グラフ G とそのグラフ上の指定した頂点 x、自然数 k に対し、重みの和が最小の x-flower with k cycles を求めよ。

ここで、x-flower with k cycles とは G の全域部分グラフで、k 個の閉路からなり、これらの閉路は唯一つの頂点 x を共有するもののことである（図１参照)。

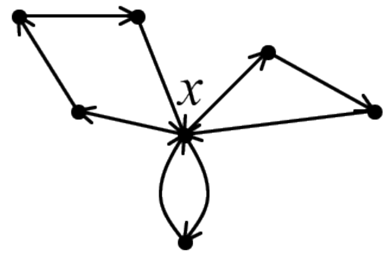

図１　x-flower with 3 cycles

特に k=1 のときは、TSP と同じ問題になるので、この VRP は TSP の一般化問題であると言える。例えば、x を倉庫とし、k 台のトラックがあるときに、x 以外の n-1 都市を各トラックで手分けしてまわるときのすべてのトラックの総移動距離を最小化する問題と言うこともできる。組合せ最適化の分野でさかんに研究されている車両配送問題は上記の問題設定の他に、各トラックの最大積載量を制限し各都市に配送すべき荷物の重量が与えられているものや各都市をまわる時間帯に制約があるものなどさまざまな条件を付加していることが多い。
この VRP を中心に本研究で得られた成果は下記のとおりである。

（１）VRP の多項式時間で解けるクラスに関する結果
本研究では、TSP の最適解が多項式時間で解ける条件を VRP に適用した場合について考えた。
まず本研究期間の前半において、TSP の多項式時間で解けるクラスとして知られている Monge 性、Strong Demidenko 条件、Supnick

条件、Kalmanson 条件のいずれを仮定しても VRP が多項式時間で解けることがわかった。具体的にはいずれの条件を仮定した場合も、pyramidal x-flower の中に最適解が存在することを示すことができた。この pyramidal x-flower はTSP において最適解が持つ重要な構造の１つであるピラミッド型巡回路を拡張した概念である。さらに、（２）で述べる結果の１つである、閉路の数 k を定数とするとき、pyramidal x-flower の中から重みの和最小のものを見つける多項式時間アルゴリズムを適用することにより、最適解が多項式時間で求められることが示された。ここで、特に、Supnick 条件、Kalmanson 条件については最適解の構造を pyramidal x-flower よりもかなり強い形で特徴づけることができた。
その後、van der Veen 条件についても VRP の多項式時間で解ける条件であることがわかった。また、榎本、太田、小田の条件(1998) を VRP に仮定すると、幅１の逆送を許すピラミッド型巡回路を拡張した構造の中に最適解があることを示した。
特に本研究期間の後半になり、前半で得たいくつかの定理を包含する結果を得ることができた。それは、(i) 各頂点に１から n までの番号をふった下での任意の４頂点 i,j,k,l (1≦i<j<k<l≦n) に関する不等式であり、かつ、(ii) TSP に対して仮定するとピラミッド型巡回路が最適解になることが示されている条件ならば、この条件を VRP に対して仮定すると pyramidal x-flower が最適解になるというものである。例えば、Monge 性や Strong Demidenko 条件についてはこの結果を適用するだけで多項式時間で解ける条件であることがただちに成り立つ。なお、(i)、(ii)のいずれか一方が成り立たない条件についてはこの結果を適用できないこともわかっており、こうした条件については別の証明を考える必要があった。榎本、太田、小田の条件については(ii) をみたさない条件であるが、この結果と似た証明手法を利用することにより、最適解の持つ構造をある程度特徴づけることができ、さらにいくつかの場合分けを行うことにより、上記の結果が得られた。

さらに、交差を解消できる不等式

$$d(i,j)+d(l,k) \leqq d(i,k)+d(l,j)$$
$$d(j,i)+d(k,l) \leqq d(k,i)+d(j,l)$$

(d(i,j)：辺(i,j)の重み。図２参照)

を含んでいる条件を仮定すると、VRP の最適解の中に、少なくとも k-1 個の各閉路が通る頂点は x を除くと区間をなしていることがわかった。このことから（２）で述べる結果の１つ、各閉路がほぼ区間をなすような x-flower に関するアルゴリズムを適用することが可能になり、当初より高速に最適解を求められることがわかった。
さらに、van der Veen 条件をみたす VRP のインスタンスで、唯一の最適解を構成する閉路が本質的に区間をなさないものを見つけることができた。この van der Veen 条件は交差を解消できる不等式を含まない条件であることから、この不等式を含む条件か否かで最適解のもつ構造が異なることがわかった。

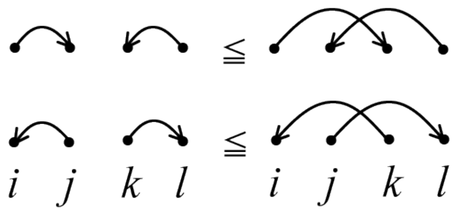

図２　交差を解消できる不等式条件

また、TSP が多項式時間で解けるクラスでよく知られている Demidenko 条件を仮定すると、最適解が pyramidal x-flower にならないインスタンスを構成することができた。このことにより、最適解の持つ構造が TSP と VRP で必ずしも同じではないことがわかった。ただ、この Demidenko 条件を VRP に仮定した場合の挙動についてはまだよくわかっていないところが多い。研究開始当時、このように TSP と VRP で最適解の持つ構造に差異が生じるような条件を見つけたいと考えていたので、当初の目標の１つを達成することができたが、今後も特にこの話題を中心に取り組んでいきたいと考えている。

（２）重みの和最小の x-flower を求めるアルゴリズムに関する結果

重みの和最小の x-flower を求める問題は閉路の数 k が１のとき TSP と等価であることから、これを求める多項式時間アルゴリズムの存在は望みがうすい。しかし、重みの和最小の pyramidal x-flower を求めるのは閉路の数を k とすると、$O(n^{2k})$ 時間で得られるアルゴリズムを見つけることができた。したがって、k を定数とすれば、多項式時間アルゴリズムになっている。k を任意の自然数にした場合に、n に関する多項式時間アルゴリズムが存在するかどうかについてはよくわかっていない。
また、k 個の閉路のうち少なくとも k-1 個の各閉路に対し、それぞれの通る頂点が x を除いて区間をなしているような pyramidal x-flower に限定した場合、その中の重みの和最小の x-flower を高速に計算するアルゴリズ

ズムを見つけることができた。これは、(1)で述べた交差を解消できる不等式を含む多くの条件に対して適用できる。
以上、(1)(2)の結果については、国際会議2件で発表し、現在論文執筆中である。

（3）平面上に凸状配置されたn頂点のハミルトン閉路に関する結果
平面上に凸状配置された頂点集合のハミルトン閉路は一般に自己交差が生じている可能性があるが、ハミルトン性を保存したまま2辺の除去・追加を行う操作（フリップ）を繰り返すことで自己交差のないハミルトン閉路が得られる。本研究では、この必要回数の上限・下限について考えた。いずれもnに比例する値でおさえることができた。
また、いくつかの制限をした（規則性のある）ハミルトン閉路に対して必要最小回数を決定している。
また、与えられたハミルトン閉路に対する、この操作の必要最小回数およびその手順を示す多項式時間アルゴリズムについてはいまだに得られていない。

（4）　閉曲面上に埋め込まれたグラフの三角形分割に関する結果
ダブルトーラス上に埋め込まれた三角形分割のうち K_6–minor を持つものの特徴づけを得た。さらに、この定理の系として、任意の5連結三角形分割は K_6–minor を持つことを証明している。ここでは、Sulanke が示したダブルトーラス上に埋め込まれる既約三角形分割のリストを一部用いて計算機による調べ上げも行った。

最後に、本研究に関する成果をふまえて、今後の課題についてまとめる。
まず、(1)で述べたように、TSP と VRP において、最適解のもつ構造が必ずしも同じでない例として Demidenko 条件をみたす具体的なインスタンスを見つけることができた。しかし、この差異を明確にするために他の本質的に異なるインスタンスについて考えることが急務であり、また、Demidenko 条件以外のものについても考える必要があることは言うまでもない。また、交差を解消できる不等式を含む条件と含まない条件の間の最適解の持つ構造の違いについてもさらに明確にしていきたいと考えている。
また、TSP については、Monge 性を緩和した条件に関する TSP について取り組んでいきたい。特に頂点への番号づけに関する条件をどの程度緩和できるかという問題や平面性を仮定するとどのような頂点配置について多項式時間で解けるかという問題についても考えていきたい。
また、平面上に凸状配置されたn頂点のハミルトン閉路に関する研究は、理論と計算機実験の両面から進める必要がある。本研究成果をふまえると、交差解消のためのフリップの必要最小回数 f(n)については、計算機による実験を行う必要があると考えている。n≦10 まではすでに計算できているが、それ以上の頂点数についてはわかっていない。これに類似するパンケーキグラフの直径等を考えると、f(n)=n−(定数)の予想を裏づけるためには、少なくとももう数頂点大きな場合について（n≦13 くらいまで）計算する必要があると考えている。そのためには、さらなる工夫が必要である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① Atsuhiro Nakamoto, <u>Yoshiaki Oda</u>, Katsuhiro Ota, 3-trees with few vertices of degree 3 in circuit graphs, Discrete Mathematics, 309, pp.666-672, 2009, 査読有

② <u>Yoshiaki Oda</u>, Mamoru Watanabe, The number of flips required to obtain non-crossing convex cycles, Lecture Notes in Computer Science, 4535, pp. 155-165, 2008, 査読有

③ Atsuhiro Nakamoto, <u>Yoshiaki Oda</u>, Katsuhiro Ota, K_6-minors in triangulations on the double torus, Congressus Numerantium, 188, pp. 150-160, 2007, 査読有

〔学会発表〕（計 6 件）

① <u>小田芳彰</u>、Demidenko conditions and the vehicle routing problem、日本数学会 2009 年度年会、2009 年 3 月 27 日、東京大学

② <u>Yoshiaki Oda</u>, Demidenko conditions and the vehicle routing problem, The 40th Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, March 5th 2009, Florida Atlantic University, USA.

③ <u>小田芳彰</u>、Polynomial time solvable

classes of the vehicle routing problem、応用数学合同研究集会、2008 年 12 月 15 日、龍谷大学

④ Yoshiaki Oda, Partial constructions of Voronoi diagrams, The 32nd Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, December 4th 2007, University of Otago, New Zealand.

⑤ Yoshiaki Oda, Special cases of the vehicle routing problem, The 38th Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, March 8th 2007, Florida Atlantic University, USA.

⑥ 小田芳彰、車両配送問題の多項式時間で解けるクラス、応用数学合同研究集会、2006 年 12 月 22 日、龍谷大学

６．研究組織

(1)研究代表者

小田　芳彰（ODA YOSHIAKI）

慶應義塾大学・理工学部・講師

研究者番号：90325043

(2)研究分担者

該当なし

(3)連携研究者

該当なし